Chapter 8 Z变换与离散系统Z域分析

- §8.1　定义、收敛域（书8.1、8.2、8.3）
- §8.2　逆Z变换计算方法（书8.4）
- §8.3　Z变换性质（书8.5）
- §8.4　Z变换与 L 变换的关系（书8.6）
- §8.5　Z变换解差分方程（书8.7）
- §8.6　系统函数、BIBO稳定（书8.8）

§8.1 定义、收敛域

- **1. Z 变换定义：**
  - 序列$x(n)$的双边 Z 变换：

$$X(z) \triangleq \mathcal{Z}\{x(n)\} \triangleq \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) z^{-n}$$

  - 序列$x(n)$的单边 Z 变换：

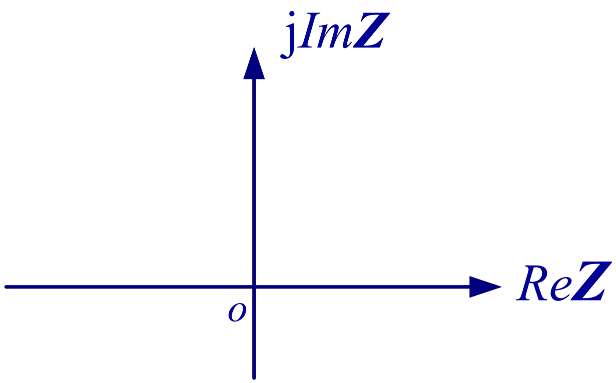
$$X(z) \triangleq \mathcal{Z}\{x(n)\} \triangleq \sum_{n=0}^{+\infty} x(n) z^{-n}$$

– **(1)** 双边：$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x(n)z^{-n}=\sum_{n=-1}^{-\infty}x(n)z^{-n}+\sum_{n=0}^{+\infty}x(n)z^{-n}$

为Laurent级数，其中：$\sum_{n=-1}^{-\infty}x(n)z^{-n}$是Laurent级数

的正则部，即z的正指数项；$\sum_{n=0}^{+\infty}x(n)z^{-n}$是Laurent

级数的主部。



– **(2) Z是复平面上的点**

– **(3) 因果序列：单边 Z变换 = 双边 Z变换。**

- **2. 逆 Z变换定义：**
  - 对双边 Z变换： $X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)z^{-n}$

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{j}}\oint_{\mathrm{C}} z^{m-1}X(z)\mathrm{d}z=\frac{1}{2\pi \mathrm{j}}\oint_{\mathrm{C}} z^{m-1}\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)z^{-n}\right]\mathrm{d}z$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x(n)\left[\frac{1}{2\pi \mathrm{j}}\oint_{\mathrm{C}} z^{m-n-1}\mathrm{d}z\right]$$

$$=x(m)$$

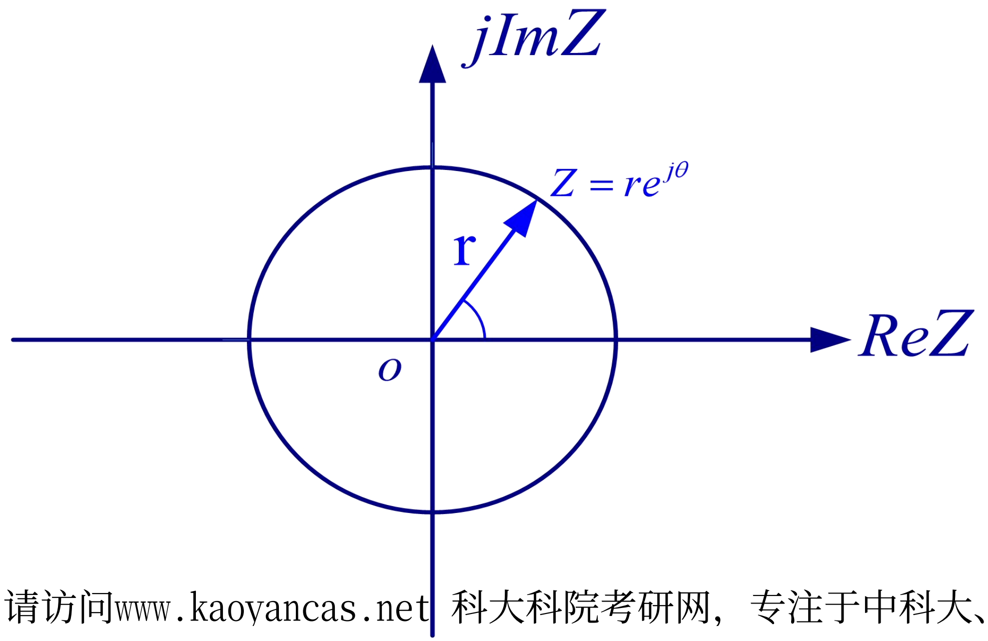
由柯西积分公式： $\frac{1}{2\pi \mathrm{j}}\oint_{\mathrm{C}} z^{m-n-1}\mathrm{d}z=\begin{cases}1, & m=n\\ 0, & m\neq n\end{cases}$

C为包围原点的闭曲线。

– 定义（双边逆Z变换）：

$$x(n)=\frac{1}{2\pi \mathrm{j}}\oint_{\mathrm{C}} z^{n-1}X(z)\mathrm{d}z = \mathrm{Z}^{-1}\{X(z)\}$$

$$=\sum_i \mathrm{Res}\{z^{n-1}X(z)\}_{z=P_i}$$



- **3. 收敛域**
  - **(1) 定义：** $x(n)$有界，使$\left|X(z)\right| = \left|\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)z^{-n}\right| \underset{一致}{<} \infty$ 的 z 的集合。
  - **(2) 判别方法：**

$$\left|X(z)\right| \le \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left|x(n)z^{-n}\right| < \infty，可令 a_n = x(n)z^{-n},$$

达朗贝尔法：$\rho \triangleq \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|$

柯西法：$\rho \triangleq \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = \lim\limits_{n\to\infty}\left|a_n\right|^{1/n}$

$$\Rightarrow \begin{cases} 若\rho < 1，则收敛； \\ 若\rho > 1，则发散； \\ 若\rho = 1，则不定。 \end{cases}$$

- **4. 序列的分类与收敛域**
  - **(1) 右边序列(因果序列)**：$x(n)$，$n \in \{n_1, \infty\}$

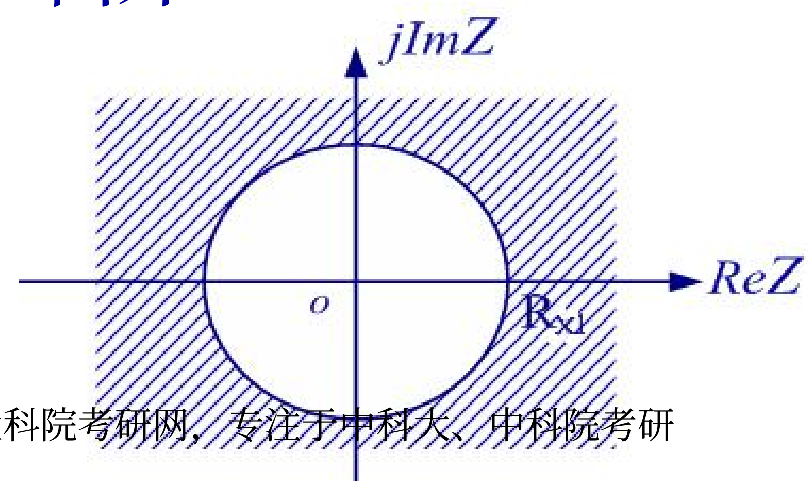
$$X(z)=\sum_{n=n_1}^{\infty} x(n) z^{-n}$$

$$\rho=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|x(n) z^{-n}\right|} \leq \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|x(n)\right|}\left|z^{-1}\right|<1$$

$$|z|>\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|x(n)\right|} \triangleq R_{x_1},$$ 圆外

$$n_1<0,\ R_{x_1}<|z|<\infty$$

$$n_1 \geq 0,\ R_{x_1}<|z| \leq \infty$$



– (2) 左边序列(逆因果序列)： $x(n)$， $n \in \{-\infty, \; n_2\}$

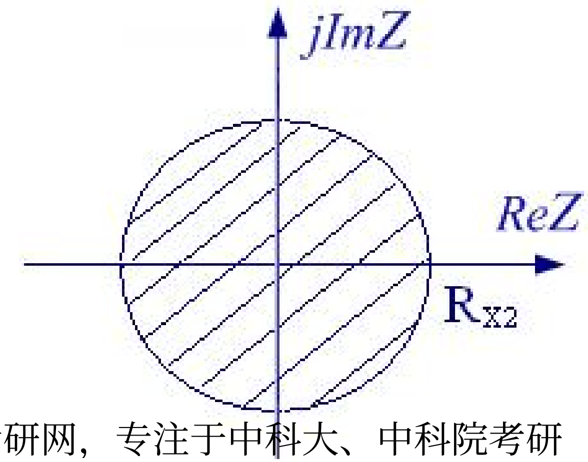
$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{n_2} x(n) z^{-n} = \sum_{n=-n_2}^{\infty} x(-n) z^{n}$$

$$\rho \le \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|x(-n)|}\,|z| < 1$$

$$|z| < \left[\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|x(-n)|}\right]^{-1} \triangleq R_{x_2}$$，圆内

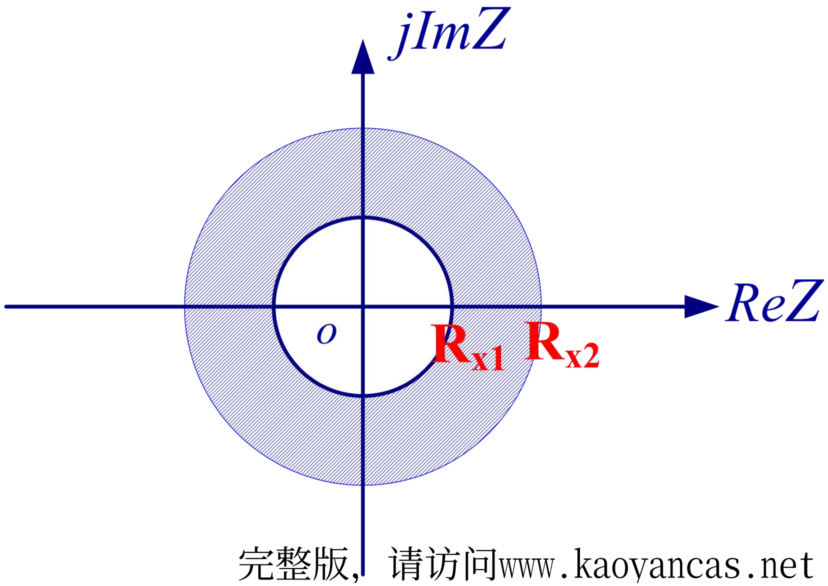
$$n_2 > 0, \quad 0 < |z| < R_{x_2}$$

$$n_2 \le 0, \quad 0 \le |z| < R_{x_2}$$



– **(3) 双边序列：** $x(n)$，$n \in \{-\infty, +\infty\}$

$$X(z)=\underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty}x(n)z^{-n}}_{\substack{\text{右边序列} \\ |z|>R_{x_1}}}+\underbrace{\sum_{n=-\infty}^{-1}x(n)z^{-n}}_{\substack{\text{左边序列} \\ |z|<R_{x_2}}}$$



若 $R_{x_1} < R_{x_2}$，环状收敛域。

若 $R_{x_1} \geq R_{x_2}$，没有收敛域。

- **5. 典型序列 Z变换**

  - **(1)** $Z\left\{\delta(n)\right\}=1$，$0\le|z|\le\infty$，**全平面收敛！**

  - **(2)** $Z\left\{u(n)\right\}=\sum_{n=0}^{+\infty}z^{-n}=\dfrac{1}{1-z^{-1}}$，$1<|z|\le\infty$

  - **(3)** $Z\left\{n\,u(n)\right\}=\sum_{n=0}^{+\infty}n\,z^{-n}=\dfrac{z}{(z-1)^{2}}$，$1<|z|\le\infty$

– (4) $\mathcal{Z}\left\{a^n u(n)\right\} = \dfrac{z}{z-a}, \quad |a| < |z| \le \infty$

注意：因式分解求 $\mathcal{Z}^{-1}$变换与求 $\mathcal{L}^{-1}$变换不同

$\mathcal{L}\left\{e^{\alpha t}\right\} = \dfrac{1}{s-\alpha}$; $\mathcal{Z}\left\{a^n u(n)\right\} = \dfrac{z}{z-a}$

The Same

– (5) $\mathcal{Z}\left\{e^{j\omega_0 n} u(n)\right\} = \dfrac{z}{z-e^{j\omega_0}}, \quad 1 < |z| \le \infty$

– (6) $\mathcal{Z}\left\{-a^n u(-n-1)\right\} = \dfrac{z}{z-a}, \quad |z| < |a|$

$\mathcal{Z}\left\{a^n u(-n-1)\right\} = -\dfrac{z}{z-a}, \quad |z| < |a|$

§8.2 逆Z变换计算方法

- **1. 留数方法**

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x(n)z^{-n}=\sum_{n=0}^{+\infty}x(n)z^{-n}+\sum_{n=-\infty}^{-1}x(n)z^{-n}=X_R(z)+X_L(z)$$

$$\therefore x(n)=\mathrm{Z}^{-1}\{X(z)\}=\frac{1}{2\pi\mathrm{j}}\oint_C z^{n-1}X(z)\mathrm{d}z$$

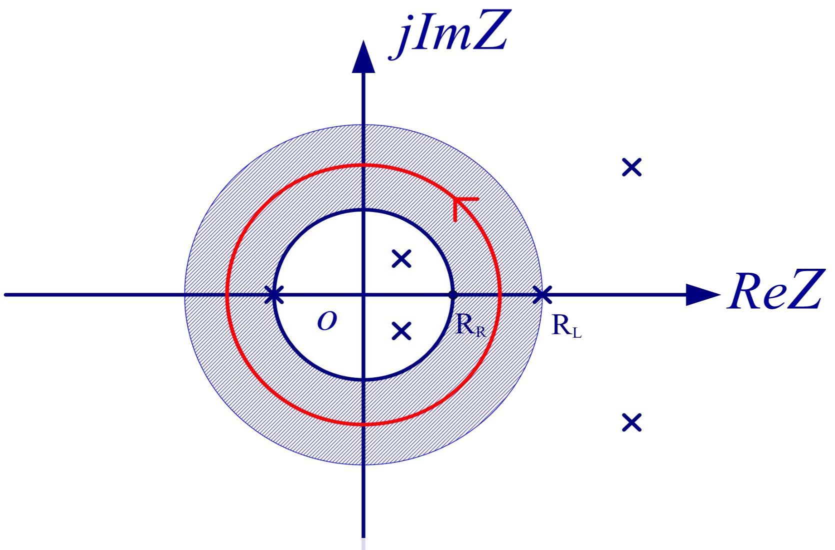
$$=\frac{1}{2\pi\mathrm{j}}\oint_C z^{n-1}X_R(z)\mathrm{d}z+\frac{1}{2\pi\mathrm{j}}\oint_C z^{n-1}X_L(z)\mathrm{d}z$$

$$=\sum_i \mathrm{Res}\left\{z^{n-1}X_R(z)\right\}\Big|_{\text{极点}p_i}u(n)-\sum_j \mathrm{Res}\left\{z^{n-1}X_L(z)\right\}\Big|_{\text{极点}p_j}u(-n-1)$$

注：

– (1) 正包围：逆时针方向走，极点都在围线的左侧；

– (2) 负包围：逆时针方向走，极点都在围线的右侧。



– (3) 若$z^{n-1}X(z)$有一极点z_m为 r 阶，其所对应的序列为：

$$\mathrm{Res}\left\{z^{n-1}X(z)\right\}_{z=z_m}=\frac{1}{(r-1)!}\left\{\frac{\mathrm{d}^{r-1}}{\mathrm{d}z^{r-1}}\left[z^{n-1}X(z)(z-z_m)^r\right]\right\}_{z=z_m}$$

当$r=1$时，$\mathrm{Res}\left\{z^{n-1}X(z)\right\}_{z=z_m}=\left\{z^{n-1}X(z)(z-z_m)\right\}\Big|_{z=z_m}$

回顾：LT逆变换的留数方法

例：$X(z)=\dfrac{z^3+2z^2+1}{z(z-1)(z-0.5)}$，$|z|>1$，求 $x(n)=?$

解：$x(n)=x(n)u(n)$；$z^{n-1}X(z)=z^{n-2}\left[z^3+2z^2+1\Big/(z-1)(z-0.5)\right]$

（1）当$n\geq 2$时，$z^{n-1}X(z)$ 有两个一阶极点：$z_1=1$、$z_2=0.5$

$$x(n)=\left\{\left[z^{n-2}\frac{z^3+2z^2+1}{z-0.5}\right]_{z=1}+\left[z^{n-2}\frac{z^3+2z^2+1}{z-1}\right]_{z=0.5}\right\}u(n-2)$$

$$=\left[8-13\times(0.5)^n\right]u(n-2)$$

（2）$n=1$，三个极点：$z_{1,2,3}=1,\ 0.5,\ 0$；$x(1)=3.5\delta(n-1)$

（3）$n=0$，三个极点：$z_{1,2,3}=1,\ 0.5,\ 0$（二阶）；$x(0)=\delta(n)$

综上：$x(n)=\delta(n)+3.5\delta(n-1)+\left[8-13\times(0.5)^n\right]u(n-2)$

• 2. 部分分式展开法

$$\mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{z}{z-a}\right\}=a^n u(n)，\text{或}\quad -a^n u(-n-1)$$

一般地：$X(z)=\dfrac{N(z)}{D(z)}=\dfrac{b_0+b_1 z+\cdots+b_{r-1}z^{r-1}+b_r z^r}{a_0+a_1 z+\cdots+a_{n-1}z^{n-1}+a_n z^n}$

一阶极点z_m，展开：$X(z)=\displaystyle\sum_{m=0}^{K}\frac{A_m z}{z-z_m}$，　$A_m=\operatorname{Res}\left.\dfrac{X(z)}{z}\right|_{z=z_m}$

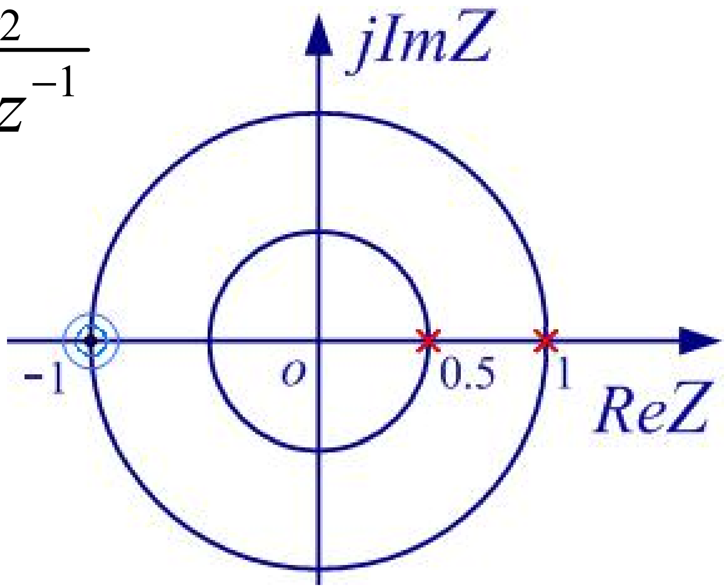
若还存在 s 阶极点 z_i，$X(z)=\displaystyle\sum_{m=0}^{M}\frac{A_m z}{z-z_m}+\sum_{j=1}^{s}\frac{B_j z}{(z-z_i)^j}$，

$$B_j=\frac{1}{(s-j)!}\left[\frac{\mathrm{d}^{s-j}}{\mathrm{d}z^{s-j}}(z-z_i)^s\frac{X(z)}{z}\right]_{z=z_i}$$

例：$X(z)=\dfrac{z^2+2z+1}{z^2-1.5z+0.5}=\dfrac{1+2z^{-1}+z^{-2}}{1-1.5z^{-1}+0.5z^{-2}}$

求：$x(n)=?\quad (1)|z|>1;\ (2)|z|<0.5;\ (3)0.5<|z|<1$

解：$X(z)=A_0+\dfrac{A_1}{1-0.5z^{-1}}+\dfrac{A_2}{1-z^{-1}}$



或：$\dfrac{X(z)}{z}=\dfrac{z^2+2z+1}{z(z-0.5)(z-1)}$

$$=\frac{A_0}{z}+\frac{A_1}{z-0.5}+\frac{A_2}{z-1}$$

(1) $|z|>1$，右边序列

$$A_0=\operatorname{Res}\left\{\frac{X(z)}{z}\right\}_{z=0}=\left[\frac{X(z)}{z}(z-0)\right]_{z=0}=2$$

$$A_1=\operatorname{Res}\left\{\frac{X(z)}{z}\right\}_{z=0.5}=\left[\frac{X(z)}{z}(z-0.5)\right]_{z=0.5}=-9$$

$$A_2=\operatorname{Res}\left\{\frac{X(z)}{z}\right\}_{z=1}=\left[\frac{X(z)}{z}(z-1)\right]_{z=1}=8$$

$$x(n)=2\delta(n)-9\times(0.5)^n u(n)+8u(n)$$

留数法：$x(n)=\delta(n)-9\times(0.5)^n u(n-1)+8u(n-1)$

(2) $|z|<0.5$，左边序列

$A_0=2$，$A_1=-9$，$A_2=8$

$$x(n)=2\delta(n)+9\times(0.5)^n u(-n-1)-8u(-n-1)$$

与留数法相同。

(3) $0.5<|z|<1$，双边序列

$A_0=2$，$A_1=-9$，$A_2=8$

$$x(n)=2\delta(n)-9\times(0.5)^n u(n)-8u(-n-1)$$

与留数法相同。

§8.3 Z变换性质

- 1. 线性性质 $\mathcal{Z}\left\{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i(n)\right\}=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i \mathcal{Z}\left\{x_i(n)\right\}$
- 2. 位移
  - (1) 双边序列位移：$X(z)$是序列$x(n)$的双边 Z 变换。

$$\mathcal{Z}\left\{x(n-m)\right\}=z^{-m}\mathcal{Z}\left\{x(n)\right\}=z^{-m}X(z),\quad z\in\text{收敛域}$$

注1：$m>0$，右移(延迟)m步；$m<0$，左移(导前)m步；

注2：引入m步延迟算子：$z^{-m}x(n)\triangleq x(n-m)$

$$\therefore\ \mathcal{Z}\left\{x(n-m)\right\}=\mathcal{Z}\left\{z^{-m}x(n)\right\}=z^{-m}X(z)$$

思考题：双边序列位移后的Z变换是否改变收敛域？

– (2) 因果序列右移的 Z 变换：

$$x(n)=x(n)u(n),\quad \mathcal{Z}\left\{x(n)u(n)\right\}=X(z)$$

则：$\mathcal{Z}\left\{x(n-m)u(n-m)\right\}=z^{-m}X(z)$

– (3) 双边序列位移的单边 Z变换

$\mathcal{Z}\left\{x(n)u(n)\right\}\triangleq X(z)$为双边序列$x(n)$的单边 Z 变换

左移性质：$\mathcal{Z}\left\{x(n+m)u(n)\right\}=z^{m}\left\{X(z)-\sum_{k=0}^{m-1}x(k)z^{-k}\right\}$

右移性质：$\mathcal{Z}\left\{x(n-m)u(n)\right\}=z^{-m}\left\{X(z)+\sum_{k=-m}^{-1}x(k)z^{-k}\right\}$

思考题：为什么不讨论因果序列左移性质？

- **3. Z域微分：** $\mathcal{Z}\left\{nx(n)\right\} = -z\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}X(z)$

- **4. Z域尺度变换：** $\mathcal{Z}\left\{a^{n}x(n)\right\} = X\left(\dfrac{z}{a}\right)$

  收敛域不等式中的 z 变为 z/a。

- **5. 初值定理：**

  若$x(n)$为因果序列，则：$x(0) = \lim\limits_{z\to\infty} X(z)$。

  证明：$X(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} x(n) z^{-n}$

  $$= x(0) + x(1)z^{-1} + x(2)z^{-2} + \cdots$$

  $$\therefore\quad x(0) = \lim_{z\to\infty} X(z)$$

- **6. 终值定理：**

若 $x(n)$ 为因果序列，$(z-1)X(z)$ 在单位圆上及外部解析（单位园上$X(z)$ 可以在 $z=1$ 点为任意阶极点），则：$\lim_{n\to\infty} x(n)=\lim_{z\to 1}\left[(z-1)X(z)\right]$

- 7. 卷积定理：

举例

设$H(z)=\mathcal{Z}\{h(n)\}$，$X(z)=\mathcal{Z}\{x(n)\}$

则：$\mathcal{Z}\{x(n)*h(n)\}=X(z)H(z)$

关于收敛域的问题：

（1）公共收敛域；（2）收敛域可能扩大

- **8. Z 域卷积定理：**

$$\mathcal{Z}\left\{x(n)h(n)\right\}=\frac{1}{2\pi \mathrm{j}}\oint_{C_1} X\left(\frac{z}{v}\right)H(v)v^{-1}\mathrm{d}v$$

$$=\frac{1}{2\pi \mathrm{j}}\oint_{C_2} X(v)H\left(\frac{z}{v}\right)v^{-1}\mathrm{d}v$$

$$\triangleq X(z)*H(z)$$

收敛域: $\left.\begin{array}{l} R_{x_1}<\left|\dfrac{z}{v}\right|<R_{x_2} \\ R_{h_1}<|v|<R_{h_2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} X\left(\dfrac{z}{v}\right)H(v)v^{-1} \text{ 的收敛域} \\ \text{即：} R_{x_1}R_{h_1}<|z|<R_{x_2}R_{h_2} \end{array}\right.$ 。

令 $v \triangleq \rho e^{\mathrm{j}\theta}$，$z = re^{\mathrm{j}\phi}$，$\rho =$ 常数，$r =$ 常数

则 $\mathrm{d}v = \mathrm{j}\rho e^{\mathrm{j}\theta}\mathrm{d}\theta$，则序列相乘的Z 变换为：

$$\mathrm{Z}\left\{x(n)h(n)\right\} = \frac{1}{2\pi}\oint_{\mathrm{C}_2} X\left(\rho e^{\mathrm{j}\theta}\right) H\left(\frac{r}{\rho} e^{\mathrm{j}(\phi-\theta)}\right)\mathrm{d}\theta$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} X\left(\rho e^{\mathrm{j}\theta}\right) H\left(\frac{r}{\rho} e^{\mathrm{j}(\phi-\theta)}\right)\mathrm{d}\theta$$

此式即为 $X\left(\rho e^{\mathrm{j}\theta}\right)$与$H\left(\rho e^{\mathrm{j}\theta}\right)$的卷积。

- **9. Paserval定理：**

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)h^*(n) = \frac{1}{2\pi \mathrm{j}} \oint_{\mathrm{C}} X(z)H^*\left(\frac{1}{z^*}\right) z^{-1}\mathrm{d}z$$

注：1）$X(z)$、$H(z)$的收敛域包含单位园；

2）单位园的表示： $|z| = 1 \Leftrightarrow z = e^{\mathrm{j}\omega T}$

围线C为单位园，$\mathrm{d}z = \mathrm{j}Te^{j\omega T}\mathrm{d}\omega$

注：3）内积不变：

$z=e^{j\omega T}$, $\mathrm{d}z = jTe^{j\omega T}\mathrm{d}\omega$, ωT 由 $-\pi \to +\pi$:

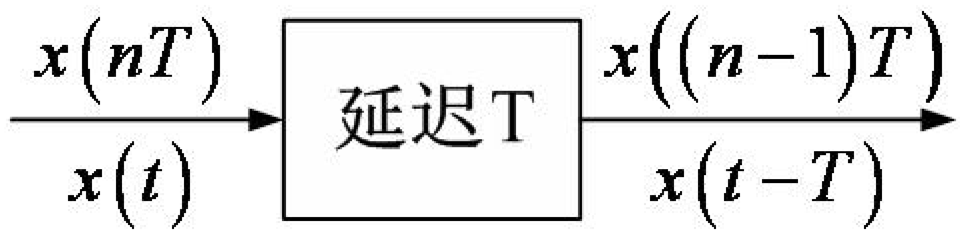
$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)h^*(n) = \frac{T}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{T}}^{\frac{\pi}{T}} X\left(e^{j\omega T}\right)H^*\left(e^{j\omega T}\right)\mathrm{d}\omega$$

4）能量不变：取 $x(n)=h(n)$

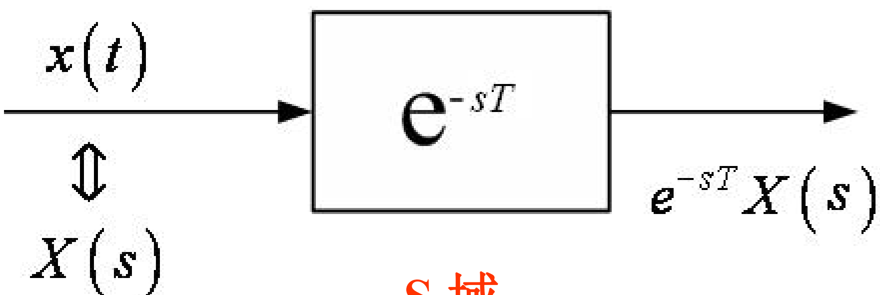
$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left|x(n)\right|^2 = \frac{T}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{T}}^{\frac{\pi}{T}} \left|X\left(e^{j\omega T}\right)\right|^2 \mathrm{d}\omega$$

§8.4 Z 变换与 L 变换的关系

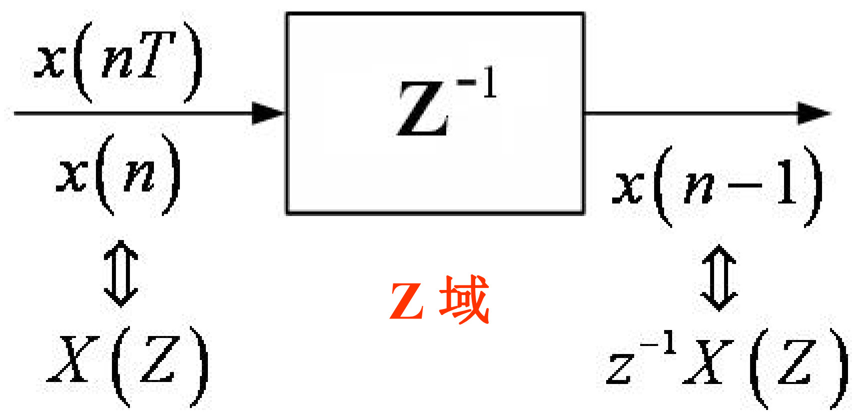
- **1. z~s 的关系：** $z = e^{sT} \Leftrightarrow s = \frac{1}{T}\ln z$
  - **(1) 物理属性：**
    (延迟)



时域



S 域



– (2) S域 → Z域的演化：

$$x_s(t) \overset{\text{理想采样}}{=\!=\!=} x(t)\delta_T(t) \overset{\text{取右边}}{=\!=\!=} \sum_{n=0}^{+\infty} x(nT)\delta(t-nT) \text{，} \quad T = \frac{2\pi}{\omega_s}$$

其中：$\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-nT)$

$$X_s(s) = \mathrm{L}\{x_s(t)\} = \sum_{n=0}^{+\infty} x(nT)e^{-snT}$$

$$X_s(s)\big|_{e^{sT}=z} \Rightarrow X(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} x(nT)z^{-n} \triangleq \mathrm{Z}\{x(nT)\}$$

$$z = e^{sT}, \quad s = \frac{1}{T}\ln z$$

- **2.** $z=e^{sT}\triangleq re^{\mathrm{j}\theta}$，$s=\sigma+\mathrm{j}\Omega$，$T=2\pi/\omega_s$

$$\therefore\quad z=e^{sT}=e^{\sigma T}e^{\mathrm{j}\Omega T}=re^{\mathrm{j}\theta}=e^{2\pi\sigma/\omega_s}e^{\mathrm{j}2\pi\Omega/\omega_s}$$

$$z(\Omega)=e^{2\pi\sigma/\omega_s}e^{\mathrm{j}2\pi(\Omega-n\omega_s)/\omega_s}=re^{\mathrm{j}\theta},\quad \theta=2\pi\Omega/\omega_s$$

$z(\Omega)=z(\Omega-n\omega_s)$，$z$是$\Omega$的函数，周期为$\omega_s$

s 域 $\rightarrow$ z 域

$\sigma=0$虚轴 $\rightarrow$ $|z|=1$，单位圆，周期为ω_s

$\sigma<0$左半开平面 $\rightarrow$ $|z|<1$，单位圆内

$\sigma>0$右半开平面 $\rightarrow$ $|z|>1$，单位圆外

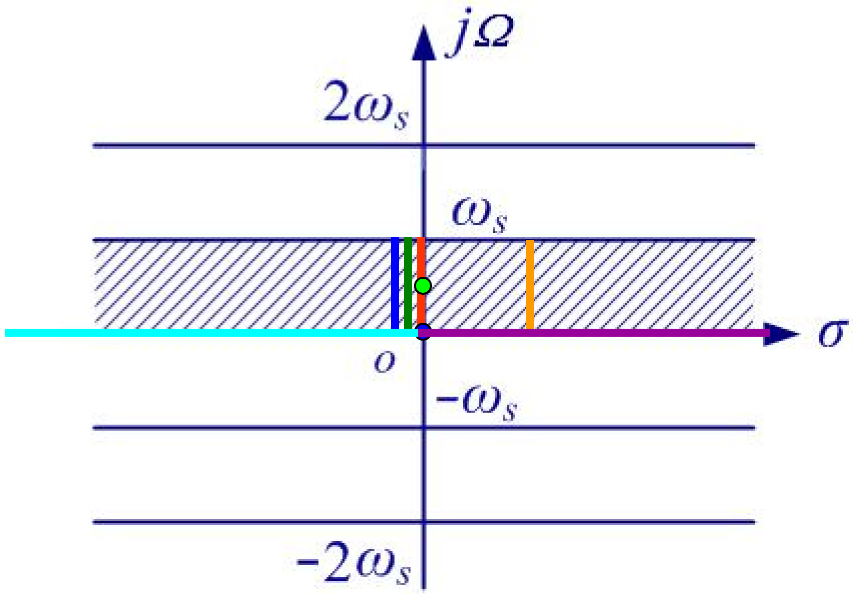
s 平面多个点 $\rightarrow$ z 平面一个点

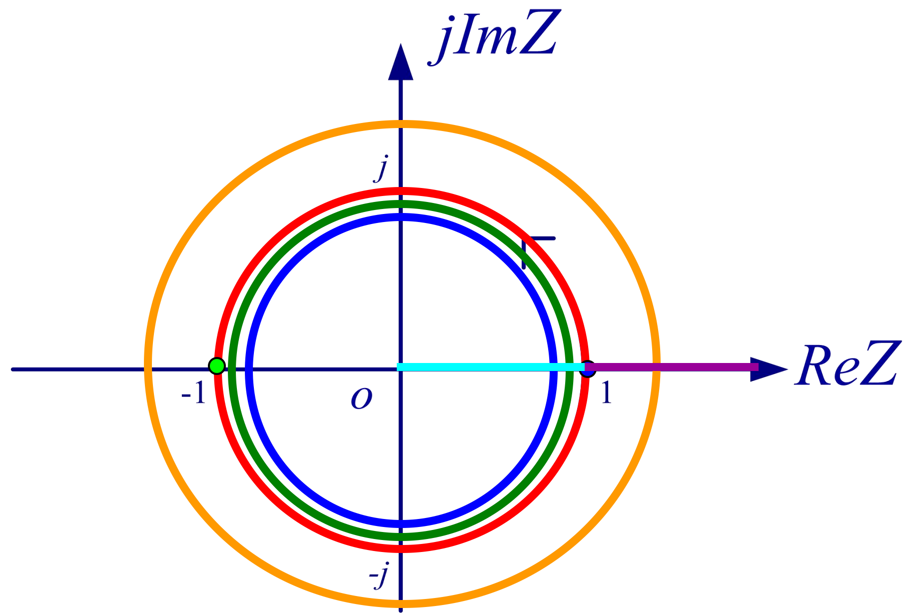
$$z = e^{sT} \triangleq re^{j\theta}，\quad s = \sigma + j\Omega，\quad T = 2\pi/\omega_s$$

$$\therefore \quad z = e^{sT} = e^{\sigma T} e^{j\Omega T} = re^{j\theta} = e^{2\pi\sigma/\omega_s} e^{j2\pi\Omega/\omega_s}$$

$$z(\Omega) = e^{2\pi\sigma/\omega_s} e^{j2\pi(\Omega - n\omega_s)/\omega_s} = re^{j\theta}，\quad \theta = 2\pi\Omega/\omega_s$$

$z(\Omega) = z(\Omega - n\omega_s)$，$z$**是$\Omega$的函数，周期为**$\omega_s$

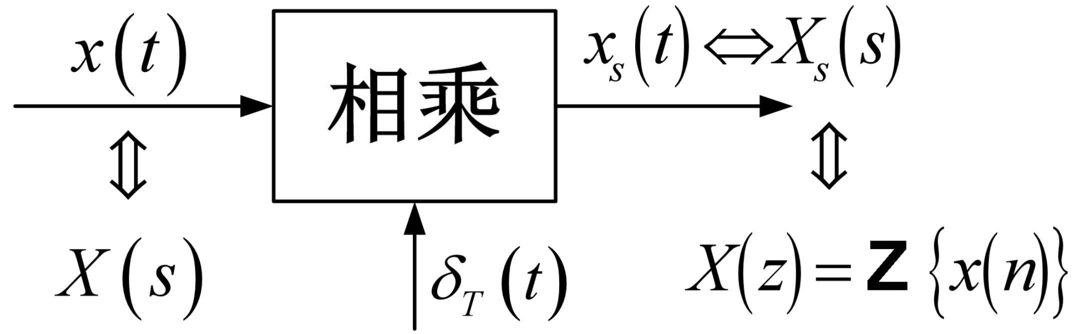




S平面横条带 $\longleftrightarrow$ Z全平面

• 3. 信号 L 变换 →采样后作 L 变换 → Z 变换

问题的提出：



$$x_s(t) = x(t)\delta_T(t)$$

$$\mathrm{L}\ \{\delta_T(t)\} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-nsT} = \frac{1}{1-e^{-sT}}, \quad \mathrm{Re}(s) > 0$$

$$X_s(s) = \mathrm{L}\ \{x_s(t)\} = \frac{1}{2\pi \mathrm{j}}\left[X(s) * \frac{1}{1-e^{-sT}}\right]$$

$$= \frac{1}{2\pi \mathrm{j}}\int_{\sigma-\mathrm{j}\infty}^{\sigma+\mathrm{j}\infty} X(p)\frac{1}{1-e^{-(s-p)T}}\mathrm{d}p$$

- (1) $x(t)$是稳定信号 $\Leftrightarrow X(p)$的极点$p_i \in \pi_l^-$

- (2) $\dfrac{1}{1-e^{-(s-p)T}}$的收敛域： $\mathrm{Re}(s-p)>0 \Leftrightarrow \mathrm{Re}(p)<\mathrm{Re}(s)$

则：$X_s(s)=\dfrac{1}{2\pi \mathrm{j}}\oint_C X(p)\dfrac{1}{1-e^{-(s-p)T}}\mathrm{d}p$

回顾

$$=\sum_i \mathrm{Res}\left\{X(p)\frac{1}{1-e^{-(s-p)T}}\right\}_{X(p)\text{的极点}p_i}$$

$$\overset{\text{一阶极点}}{=}\left[\sum_i \frac{X(p)}{1-z^{-1}e^{pT}}(p-p_i)\right]_{p=p_i}$$

因此有：$X(z)=\mathcal{Z}\{x_s(n)\}=X_s(s)\big|_{s=\frac{1}{T}\ln z}$

例：

稳定信号$x(t)$的拉氏变换$X(s)$有J个一阶极点：

$$X(p)=\sum_{j=1}^{J}\frac{A_j}{p-p_j}$$

$$X(z)=\sum_{i}\mathrm{Res}\left\{\sum_{j=1}^{J}\frac{A_j}{p-p_j}\frac{1}{1-z^{-1}e^{pT}}\right\}_{p=p_i}$$

$$=\sum_{j=1}^{J}\left\{\frac{A_j}{1-z^{-1}e^{p_jT}}\right\}$$

求Z变换的一种方法（而已）。

§8.5 Z变换解差分方程

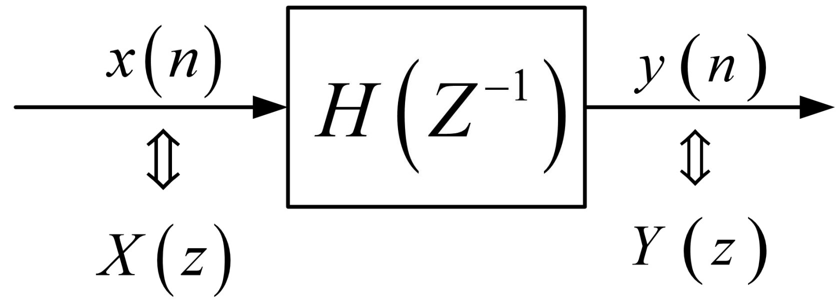
差分方程： $\sum_{k=0}^{N} a_k y(n-k) = \sum_{r=0}^{M} b_r x(n-r) \Rightarrow$

$$\mathrm{Z}\left\{\sum_{k=0}^{N} a_k y(n-k)\right\} = \mathrm{Z}\left\{\sum_{r=0}^{M} b_r x(n-r)\right\} \Rightarrow$$

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \mathrm{Z}\left\{y(n-k)\right\} = \sum_{r=0}^{M} b_r \mathrm{Z}\left\{x(n-r)\right\} \Rightarrow$$

$$\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}\left[Y(z)+\sum_{l=-k}^{-1} y(l) z^{-l}\right] = \sum_{r=0}^{M} b_r z^{-r}\left[X(z)+\sum_{m=-r}^{-1} x(m) z^{-m}\right]$$

- 优点：可直接带入初值



当系统零状态：$y(n)=0,\ \ n<0$

因果序列输入：$x(n)=0,\ \ n<0$

则有：

$$Y(z)=\frac{\sum_{r=0}^{M} b_r z^{-r}}{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}} X(z)$$

§8.6 系统函数、BIBO稳定

- 1. $H(z) = \mathcal{Z}\{h(n)\}$ 称为离散系统的系统函数。
- 2. 离散系统的特征函数

对于输入$x(n)=z^n$，$y(n)=h(n)*x(n)$

$$y(n)=\sum_{m=-\infty}^{+\infty}h(m)z^{n-m}=\left[\sum_{m=-\infty}^{+\infty}h(m)z^{-m}\right]z^n=H(z)z^n$$

即：$y(n)=Lz^n=H(z)z^n$。

回顾

可见，z^n 是线性定常离散系统的特征函数。

- **3. 系统BIBO稳定：离散系统BIBO稳定**

$$\Leftrightarrow \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left| h(n) \right| < \infty \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h(n) < \infty$$

由 $H(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} h(n) z^{-n}$，有 $H(1)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} h(n) < \infty$

$\Leftrightarrow H(z)$的收敛域包含单位圆。

对于因果系统，$h(n)=h(n)u(n)$为右边序列，

则说明$H(z)$的极点在单位圆内。

- **例题8-19：**

已知零状态系统输入因果序列：

$$y(n)+0.2y(n-1)-0.24y(n-2)=x(n)+x(n-1)$$

求：

(1) $H(z)$=?

(2) 因果系统$H(z)$的收敛域、BIBO稳定性?

(3) $h(n)=?$

(4) 输入为$u(n)$，求零状态响应$y(n)$

End of Chapter 8

Thx~ 4 Ur Attention.

LT逆变换回顾：

$$f(t)=\frac{1}{2\pi \mathrm{j}}\left\{\int_{\sigma-\mathrm{j}\infty}^{\sigma+\mathrm{j}\infty}F(s)e^{st}\mathrm{d}s+\int_{CR}F(s)e^{st}\mathrm{d}s-\int_{CR}F(s)e^{st}\mathrm{d}s\right\}$$

$$=\sum_i \mathrm{Res}\left\{F(s)e^{st}\right\}_{s=p_i}u(t)$$ （围线C内全部极点的留数和）

（1）当p_i为$F(s)$的一阶极点，$F(s)=\dfrac{N(s)}{(s-p_i)D_0(s)}$

则：$\mathrm{Res}\left\{F(p_i)e^{p_i t}\right\}=\left[(s-p_i)F(s)e^{st}\right]_{s=p_i}u(t)$

（2）当p_i为$F(s)$的r阶极点，$F(s)=\dfrac{N(s)}{(s-p_i)^r D_0(s)}$

则：$\mathrm{Res}\left\{F(p_i)e^{p_i t}\right\}$

$$=\frac{1}{(r-1)!}\left[\frac{\mathrm{d}^{r-1}}{\mathrm{d}s^{r-1}}(s-p_i)^r F(s)e^{st}\right]_{s=p_i}u(t)$$

返回

1）$x(n)=u(n)$，

在$z=1$处有一阶极点，其它点解析，则$x(\infty)=1$

2）$x(n)=a^n u(n)$，$0<a<1$，则$x(\infty)=0$

3）$x(n)=a^n u(n)$，极点$z=a>1$，不宜用终值定理。

4）$x(n)=n\cdot u(n)$，显然$x(\infty)=\infty$，终值定理验证如下：

$$x(\infty)=\lim_{z\to1}(z-1)X(z)=\lim_{z\to1}(z-1)\frac{z}{(z-1)^2}=\lim_{z\to1}\frac{z}{(z-1)}=\infty$$

5）$x(n)=\cos(n\omega_0)u(n)$，序列一直振荡，终值不定！

$$\mathcal{Z}\left\{\cos(n\omega_0)u(n)\right\}=\frac{z(z-\cos\omega_0)}{z^2-2z\cos\omega_0+1},$$

返回

极点 $z=\cos\omega_0\pm j\sin\omega_0$ 在单位圆上，不能用终值定理。

§5.3 拉普拉斯逆变换

- **极点、零点：** $F(s)=\mathcal{L}\{f(t)\}=\dfrac{N(s)}{D(s)}$

  - $F(s)$的极点为 $p_i \Leftrightarrow F(p_i)=\infty$，

    当$N(s)$与$D(s)$互素时，极点p_i即是$D(s)$的零点。

  - $F(s)$的零点为 $z_i \Leftrightarrow F(z_i)=0$，

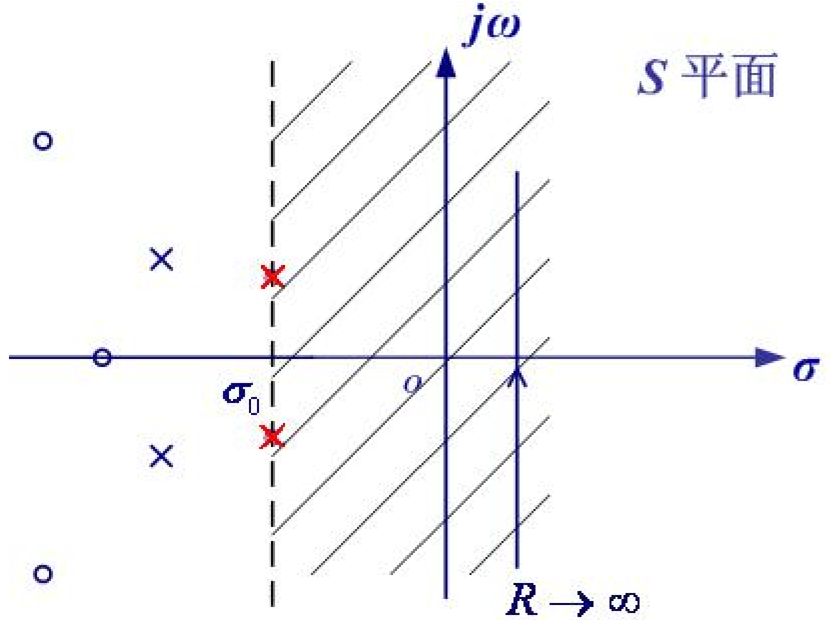
    当$N(s)$与$D(s)$互素时，零点z_i即是$N(s)$的零点。

- 已知$F(s)$，求$f(t)$

$$f(t) \triangleq \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$$

$$\triangleq \frac{1}{2\pi \mathrm{j}} \int_{\sigma-\mathrm{j}\infty}^{\sigma+\mathrm{j}\infty} F(s) e^{st} \mathrm{d}s, \qquad \sigma > \sigma_0 = \max \operatorname{Re} p_i$$

（最右边极点）



• 方法一：留数法

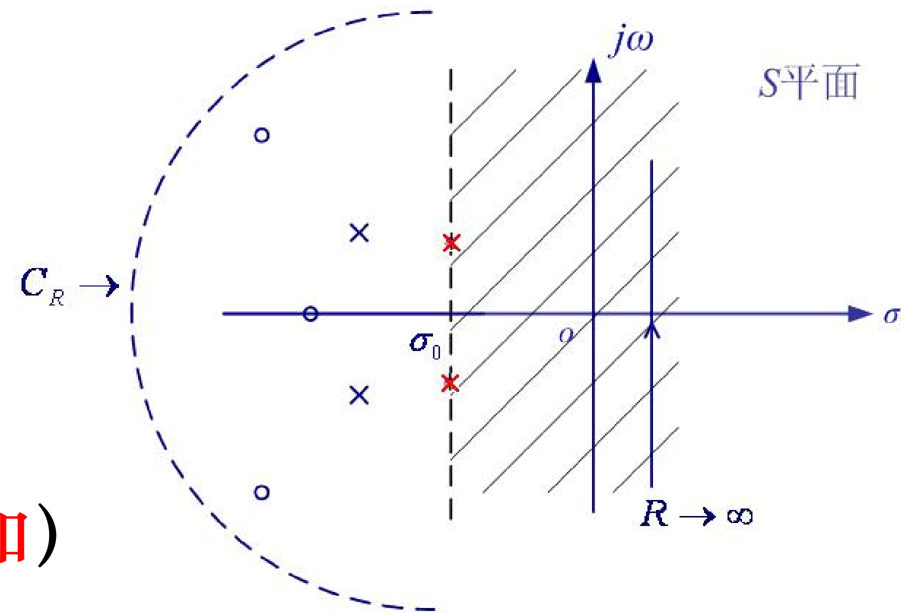
$$f(t)=\frac{1}{2\pi \mathrm{j}}\left\{\int_{\sigma-\mathrm{j}\infty}^{\sigma+\mathrm{j}\infty}F(s)e^{st}\mathrm{d}s+\int_{CR}F(s)e^{st}\mathrm{d}s-\int_{CR}F(s)e^{st}\mathrm{d}s\right\}$$

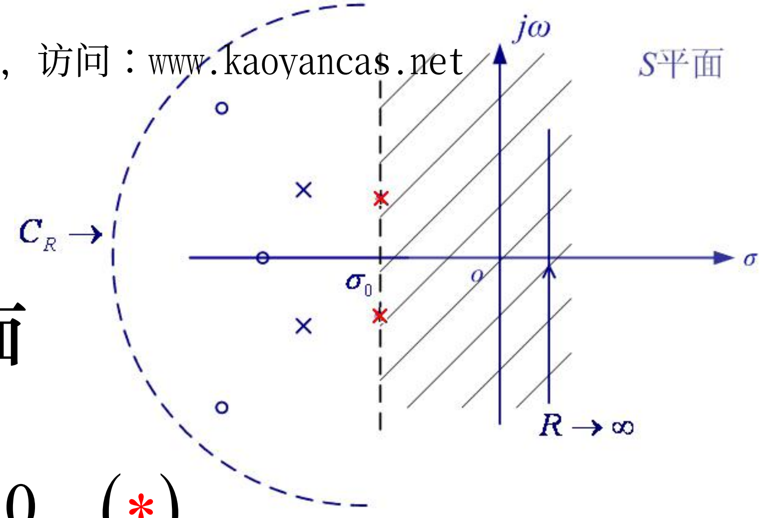
$$=\frac{1}{2\pi \mathrm{j}}\left\{\int_{\sigma-\mathrm{j}\infty}^{\sigma+\mathrm{j}\infty}F(s)e^{st}\mathrm{d}s+\int_{CR}F(s)e^{st}\mathrm{d}s\right\}$$

$$=\frac{1}{2\pi \mathrm{j}}\left\{\oint_{C}F(s)e^{st}\mathrm{d}s\right\}$$

$$=\sum_{i}\mathrm{Res}\left\{F(s)e^{st}\right\}_{s=p_i}u(t)$$

(围线C 内全部极点的留数和)





– 说明与求解方法：

（1）曲线CR，$R=\infty$，在左半平面

（2）充要条件：$\frac{1}{2\pi \mathrm{j}}\int_{CR} F(s)e^{st}\mathrm{d}s=0 \quad (*)$

（3）$F(s)=\frac{N(s)}{D(s)}$，若$\deg N < \deg D$，则$(*)$式成立

（4）e^{st}解析，是全纯/整函数，对$F(s)e^{st}$极点没有贡献

（5）当$F(s)$不是有理函数时，须研究

$\frac{1}{2\pi \mathrm{j}}\int_{CR} F(s)e^{st}\mathrm{d}s=0$ 是否成立？

返回

（1）对于矩阵A，有$A\xi=\lambda\xi$，$\xi\in R^n$，$\xi\neq 0$

ξ为特征向量，λ为属于ξ的特征值

（2）仿照上式：$\boldsymbol{T}\left\{e^{\mathrm{j}\omega_0 t}\right\}=H\left(\mathrm{j}\omega_0\right)e^{\mathrm{j}\omega_0 t}$

$e^{\mathrm{j}\omega_0 t}\leftrightarrow$特征函数，频谱$H\left(\mathrm{j}\omega_0\right)\leftrightarrow$特征值。

返回