

# 第七章 一阶电路和二阶电路 的时域分析

7-1 动态电路的方程及其初始条件

7-2 一阶电路的零输入响应

7-3 一阶电路的零状态响应

7-4 一阶电路的全响应

7-5 二阶电路的零输入响应

7-6 二阶电路的零状态响应和全响应

7-7 一阶电路和二阶电路的阶跃响应

7-8 一阶电路和二阶电路的冲激响应

\*7-9 卷积积分

\*7-10 状态方程

\*7-11 动态电路时域分析中的几个问题

本章重点

首页

## ● 重点

1. 动态电路方程的建立及初始条件的确定
2. 一阶和二阶电路的零输入响应、零状态响应和全响应的概念及求解
3. 一阶和二阶电路的阶跃响应概念及求解

# 7-1 动态电路的方程及其初始条件

## 1. 动态电路 →

含有动态元件电容和电感的电路称为动态电路。



### 特点

当动态电路状态发生改变时(换路)，需要经历一个变化过程才能达到新的稳定状态。这个变化过程称为电路的过渡过程。

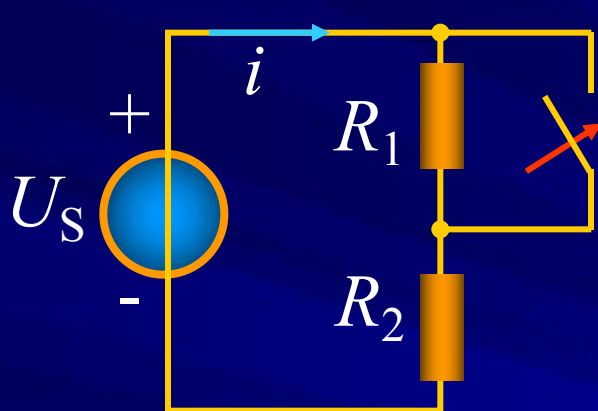


## 500kV断路器

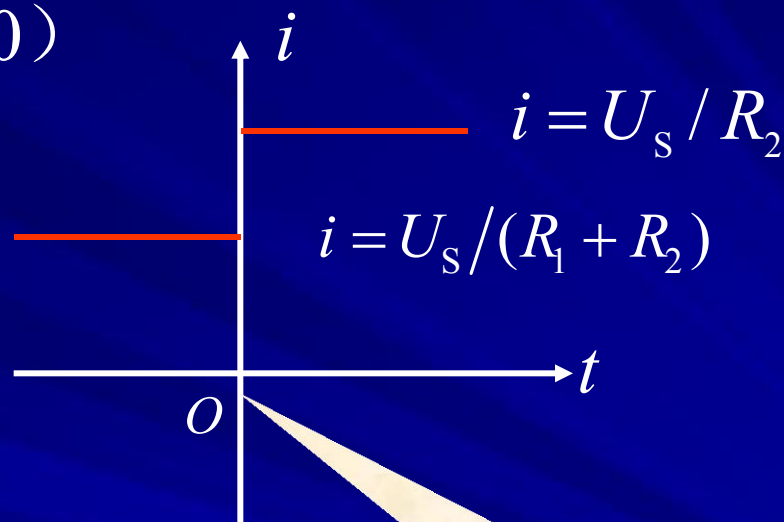
完整版，请访问[www.kaoyancas.net](http://www.kaoyancas.net) 科大科院考研网，专注于中科大、中科院考研

[返回](#)[上页](#)[下页](#)

## 电阻电路

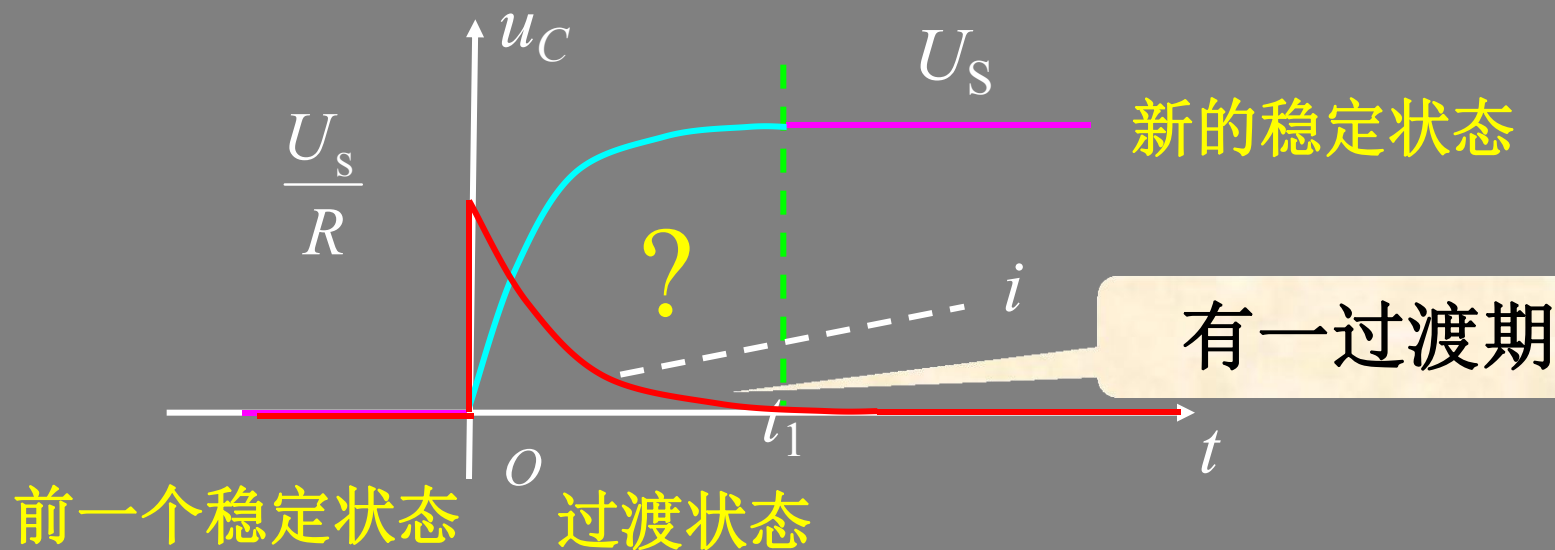
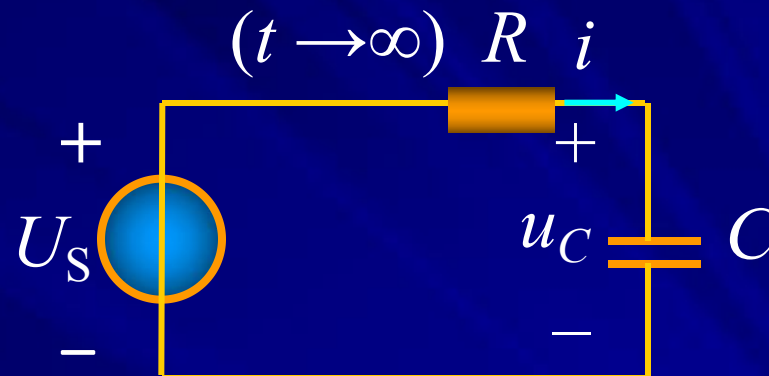
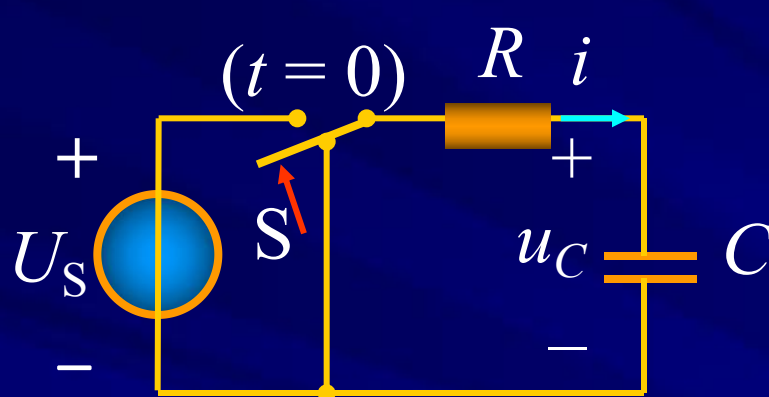


$(t = 0)$

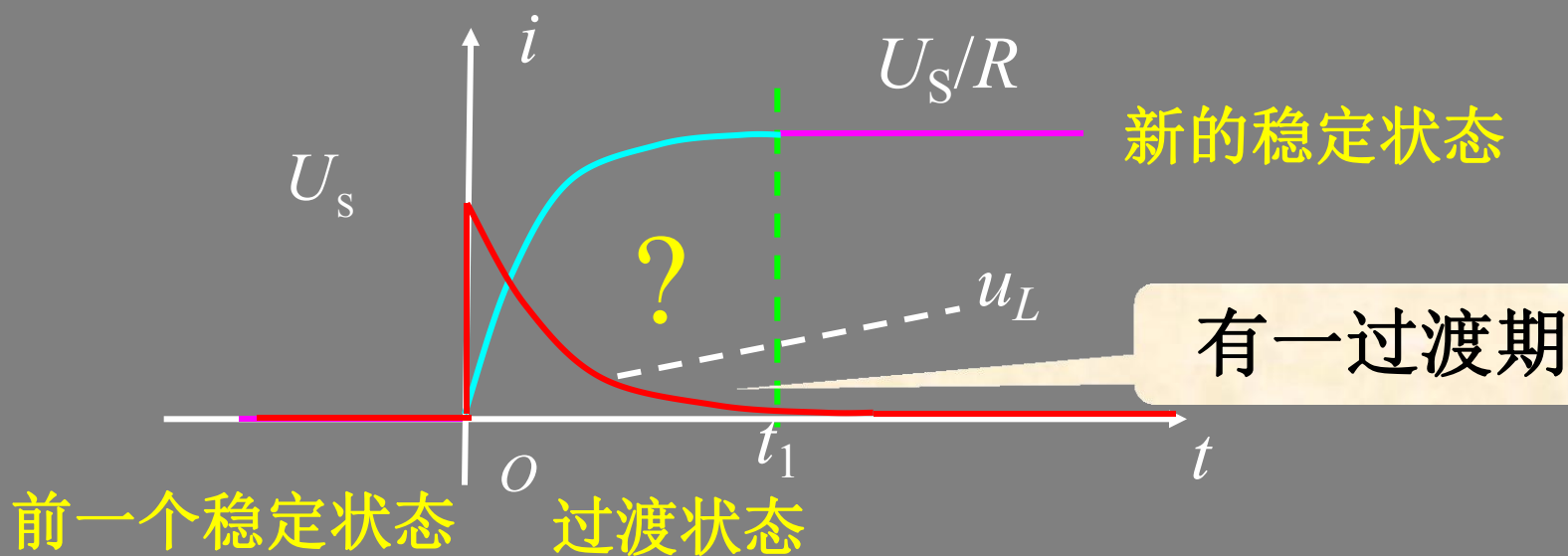
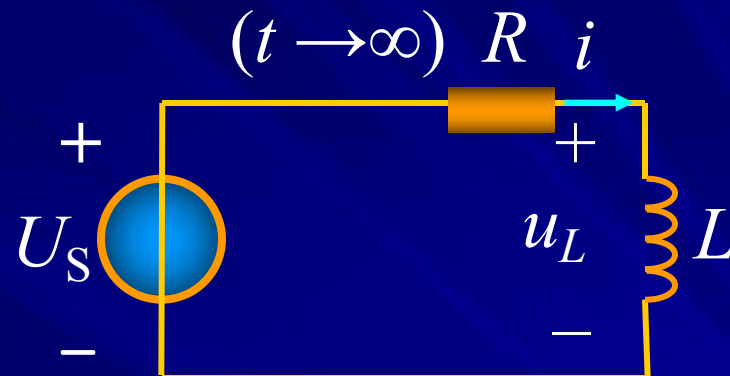
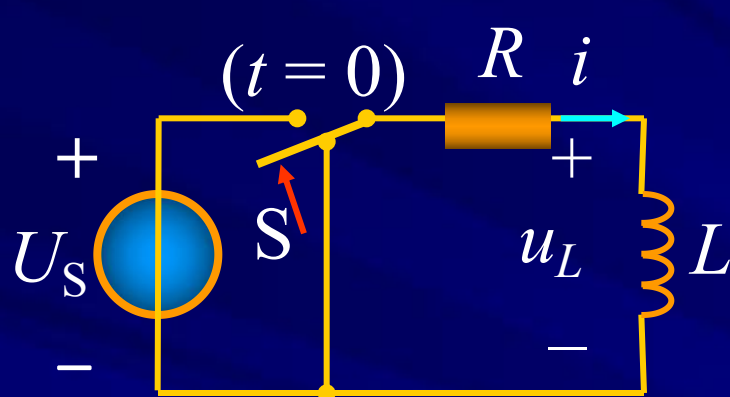


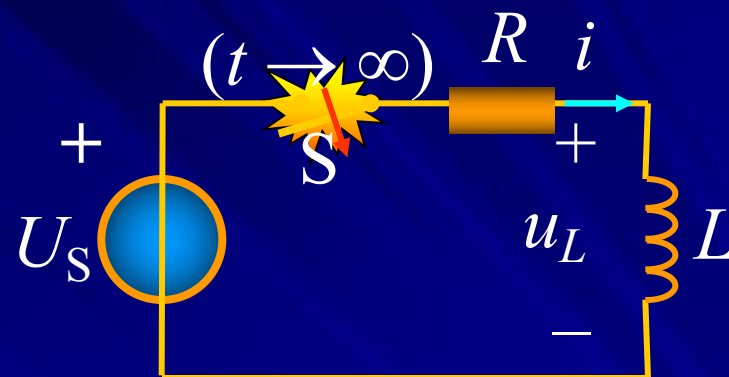
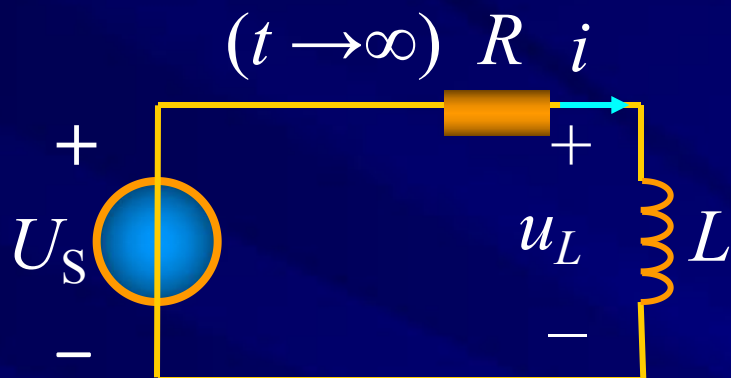
过渡期为零

# 电容电路



## 电感电路





S未动作前，电路处于稳定状态： $u_L = 0$ ， $i = U_S / R$

S断开瞬间  $i = 0$ ， $u_L = \infty$



注意

工程实际中在切断电容或电感电路时会出现过电压和过电流现象。

**换路****电路结构、状态发生变化** $\left\{ \begin{array}{l} \text{支路接入或断开} \\ \text{电路参数变化} \end{array} \right.$ **过渡过程产生的原因**

电路内部含有储能元件  $L$ 、 $C$ ，电路在换路时能量发生变化，而能量的储存和释放都需要一定的时间来完成。

$$p = \frac{\Delta W}{\Delta t}$$

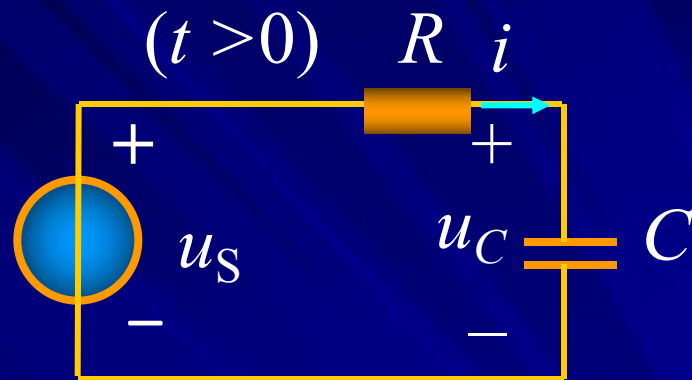
$$\Delta t \Rightarrow 0$$

$$p \Rightarrow \infty$$

## 2. 动态电路的方程

### RC电路

应用KVL和电容的VCR得



$$\begin{cases} Ri + u_c = u_s(t) \\ i = C \frac{du_c}{dt} \end{cases} \longrightarrow RC \frac{du_c}{dt} + u_c = u_s(t)$$

若以电流为变量

$$Ri + \frac{1}{C} \int i dt = u_s(t)$$

$$\longrightarrow R \frac{di}{dt} + \frac{i}{C} = \frac{du_s(t)}{dt}$$

## RL电路

应用KVL和电感的VCR得

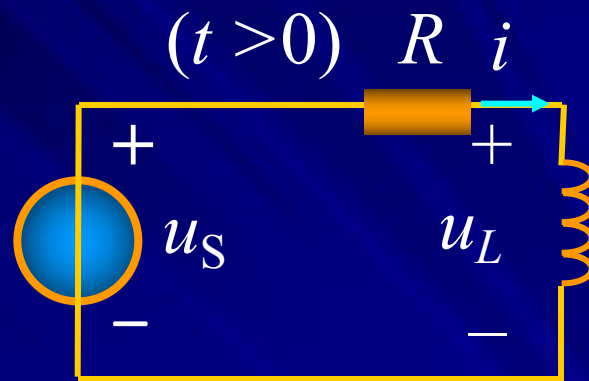
$$\begin{cases} Ri + u_L = u_S(t) \\ u_L = L \frac{di}{dt} \end{cases}$$

$$\longrightarrow Ri + L \frac{di}{dt} = u_S(t)$$

若以电感电压为变量

$$\frac{R}{L} \int u_L dt + u_L = u_S(t)$$

$$\longrightarrow \frac{R}{L} u_L + \frac{du_L}{dt} = \frac{du_S(t)}{dt}$$





## 结论

含源  
电阻  
电路

一个动  
态元件

一阶  
电路

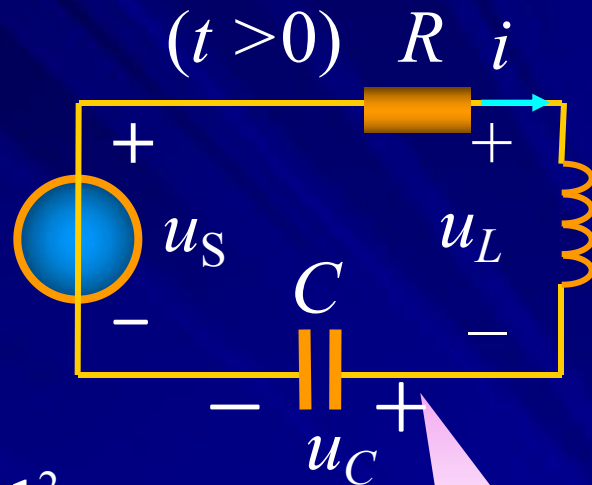
含有一个动态元件电容或电感的线性电路，其电路方程为一阶线性常微分方程，称为一阶电路。

## RLC电路

应用KVL和元件的VCR得

$$\begin{cases} Ri + u_L + u_C = u_S(t) \\ i = C \frac{du_C}{dt} \quad u_L = L \frac{di}{dt} = LC \frac{d^2 u_C}{dt^2} \end{cases}$$

$$\rightarrow LC \frac{d^2 u_C}{dt^2} + RC \frac{du_C}{dt} + u_C = u_S(t)$$



二阶电路

含有二个动态元件的线性电路，其电路方程为二阶线性常微分方程，称为二阶电路。

**结论**

①描述动态电路的电路方程为微分方程。

②动态电路方程的阶数通常等于电路中动态元件的个数。

**一阶电路**

→ 一阶电路中只有一个动态元件，描述电路的方程是一阶线性微分方程。

$$a_1 \frac{dx}{dt} + a_0 x = e(t) \quad t \geq 0$$

**二阶电路**

→ 二阶电路中有二个动态元件，描述电路的方程是二阶线性微分方程。

$$a_2 \frac{d^2 x}{dt^2} + a_1 \frac{dx}{dt} + a_0 x = e(t) \quad t \geq 0$$

## 高阶电路



电路中有多个动态元件，描述电路的方程是高阶微分方程。

$$a_n \frac{d^n x}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{dx}{dt} + a_0 x = e(t) \quad t \geq 0$$

## 动态电路的分析方法

①根据KVL、KCL和VCR建立微分方程。

## ②求解微分方程。

本章  
采用

时域分析法

经典法

状态变量法

卷积积分

数值法

复频域分析法

拉普拉斯变换法

状态变量法

傅氏变换

工程中高阶微分方程应用计算机辅助分析求解。

## 稳态分析和动态分析的区别

稳态

动态

恒定或周期性激励

换路发生很长时间后状态

微分方程的特解

任意激励

换路发生后的整个过程

微分方程的通解

直流时  $a_1 \frac{dx}{dt} + a_0 x = U_s$

$t \Rightarrow \infty \quad \frac{dx}{dt} = 0 \quad a_0 x = U_s$

### 3. 电路的初始条件

①  $t = 0_+$  与  $t = 0_-$  的概念 认为换路在  $t=0$  时刻进行

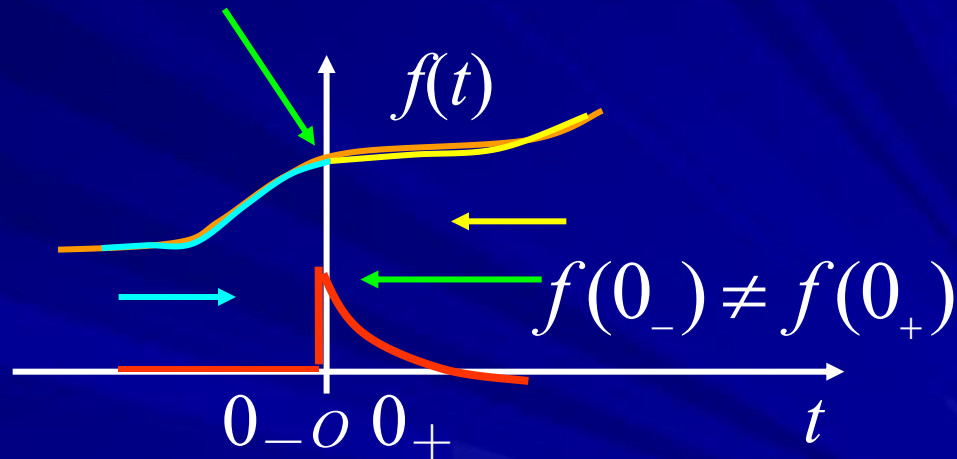
$0_-$  换路前一瞬间

$$f(0_-) = f(0_+)$$

$$f(0_-) = \lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t < 0}} f(t)$$

$0_+$  换路后一瞬间

$$f(0_+) = \lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t > 0}} f(t)$$



**注意**

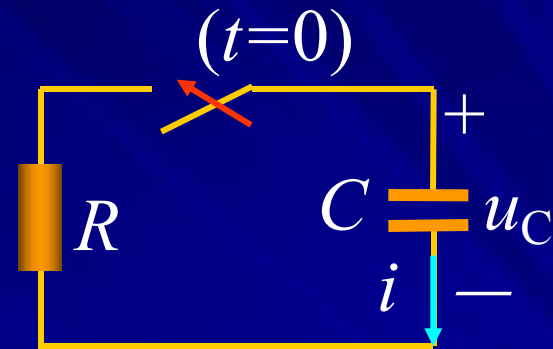
初始条件为  $t = 0_+$  时， $u$ 、 $i$  及其各阶导数的值。

例1-1 图示为电容放电电路，电容原先带有电压 $U_0$ ，求开关闭合后电容电压随时间的变化。

解

$$Ri + u_C = 0 \quad (t \geq 0)$$

$$\rightarrow RC \frac{du_C}{dt} + u_C = 0$$



特征根方程：  $RCp + 1 = 0 \rightarrow p = -1/RC$

通解：  $u_C(t) = ke^{pt} = ke^{-\frac{t}{RC}}$

代入初始条件得：  $k = U_0 \rightarrow u_C(t) = U_0 e^{-\frac{t}{RC}}$



明确

在动态电路分析中，初始条件是得到确定解答的必需条件。

## ②电容的初始条件

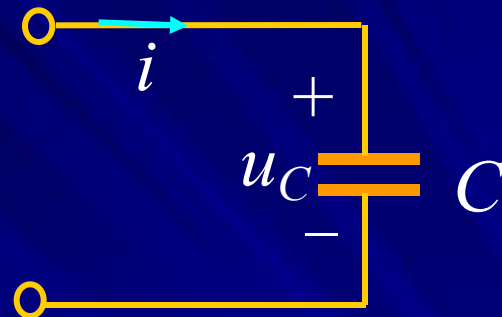
$$u_C(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i(\xi) d\xi$$

$$= \frac{1}{C} \int_{-\infty}^{0_-} i(\xi) d\xi + \frac{1}{C} \int_{0_-}^t i(\xi) d\xi$$

$$= u_C(0_-) + \frac{1}{C} \int_{0_-}^t i(\xi) d\xi$$

$$t = 0_+ \text{ 时刻 } u_C(0_+) = u_C(0_-) + \frac{1}{C} \int_{0_-}^{0_+} i(\xi) d\xi$$

当  $i(\xi)$  为有限值时



$$u_C(0_+) = u_C(0_-)$$

$$q = C u_C$$


$$q(0_+) = q(0_-)$$

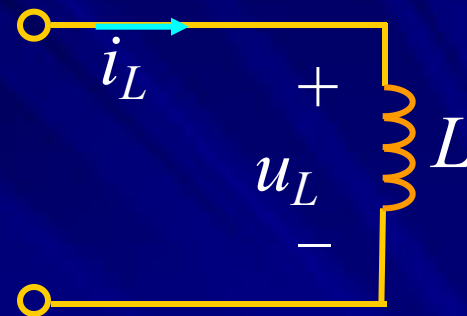
电荷  
守恒



## 结论

换路瞬间，若电容电流保持为有限值，  
则电容电压（电荷）换路前、后保持不变。

### ③电感的初始条件



$$i_L(t) = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t u_L(\xi) d\xi$$

$$= \frac{1}{L} \int_{-\infty}^{0_-} u_L(\xi) d\xi + \frac{1}{L} \int_{0_-}^t u_L(\xi) d\xi$$

$$= i_L(0_-) + \frac{1}{L} \int_{0_-}^t u_L(\xi) d\xi$$

$$t = 0_+ \text{时刻} \quad i_L(0_+) = i_L(0_-) + \frac{1}{L} \int_{0_-}^{0_+} u(\xi) d\xi$$

*(Note: In the original image, the integral term is crossed out with a red arrow pointing to a red '0', indicating it is zero for finite voltage.)*

当 $u_L$ 为有限值时

$$i_L(0_+) = i_L(0_-)$$

磁链  
守恒

$$\Psi = Li_L$$



$$\Psi_L(0_+) = \Psi_L(0_-)$$



结论

换路瞬间，若电感电压保持为有限值，  
则电感电流（磁链）换路前、后保持不变。

## ④换路定律

$$\begin{cases} q_C(0_+) = q_C(0_-) \\ u_C(0_+) = u_C(0_-) \end{cases}$$

换路瞬间，若电容电流保持为有限值，则电容电压（电荷）换路前、后保持不变。

$$\begin{cases} \Psi_L(0_+) = \Psi_L(0_-) \\ i_L(0_+) = i_L(0_-) \end{cases}$$

换路瞬间，若电感电压保持为有限值，则电感电流（磁链）换路前、后保持不变。



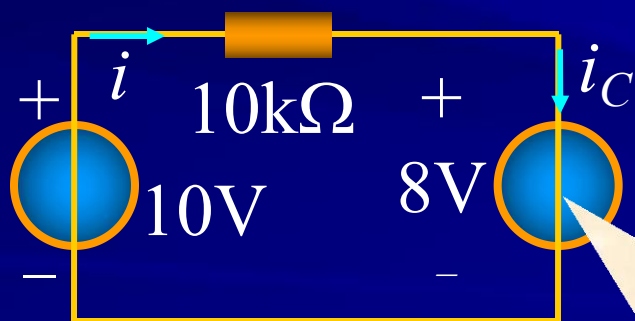
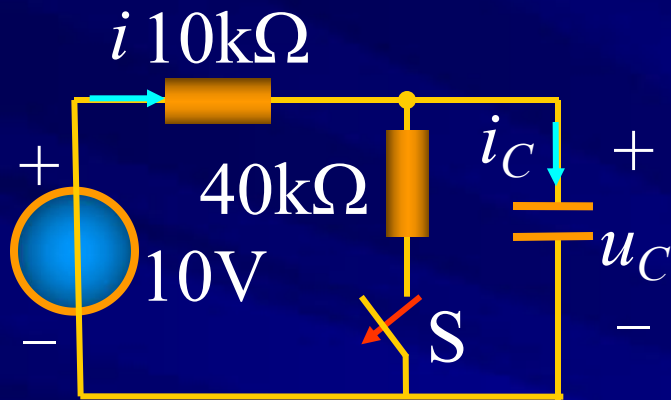
**注意**

①电容电流和电感电压为有限值是换路定律成立的条件。

②换路定律反映了能量不能跃变。

## ⑤ 电路初始值的确定

例1-2 求  $i_C(0_+)$ 。



$0_+$  等效电路

电容用



注意

$$i_C(0_+) \neq i_C(0_-)$$

(1) 由  $0_-$  电路求  $u_C(0_-)$



$$u_C(0_-) = 8V$$

电容开路

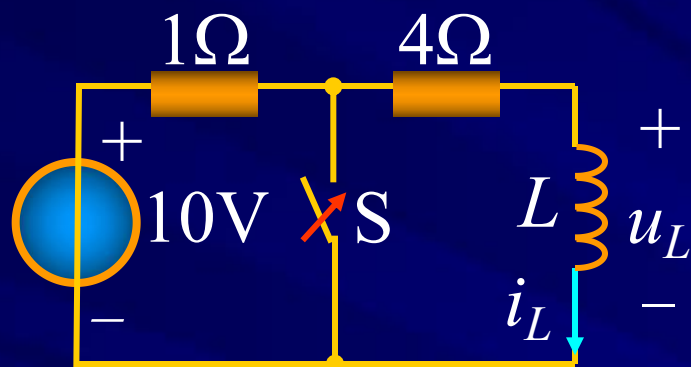
(2) 由换路定律

$$u_C(0_+) = u_C(0_-) = 8V$$

(3) 由  $0_+$  等效电路求  $i_C(0_+)$

$$i_C(0_+) = \frac{10-8}{10} \text{ mA} = 0.2 \text{ mA}$$

例1-3  $t=0$ 时闭合开关S，求  $u_L(0_+)$ 。

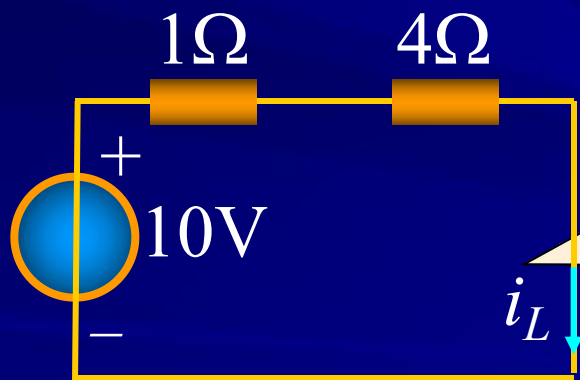


②应用换路定律：

$$i_L(0_+) = i_L(0_-) = 2A$$

③由  $0_+$  等效电路求  $u_L(0_+)$

解 ①先求  $i_L(0_-)$



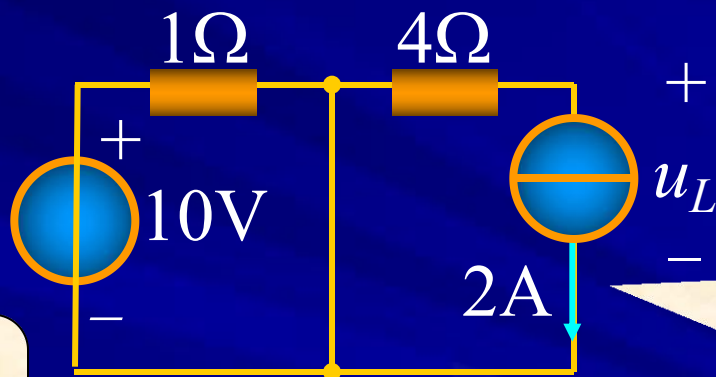
电感  
短路

$$i_L(0_-) = \frac{10}{1+4} A = 2A$$



注意

$$u_L(0_+) \neq u_L(0_-)$$



电感用电  
流源替代

$$u_L(0_+) = -2 \times 4V = -8V$$



## 小结 求初始值的步骤：

1. 由换路前电路（稳定状态）求  $u_C(0_-)$  和  $i_L(0_-)$ 。

2. 由换路定律得  $u_C(0_+)$  和  $i_L(0_+)$ 。

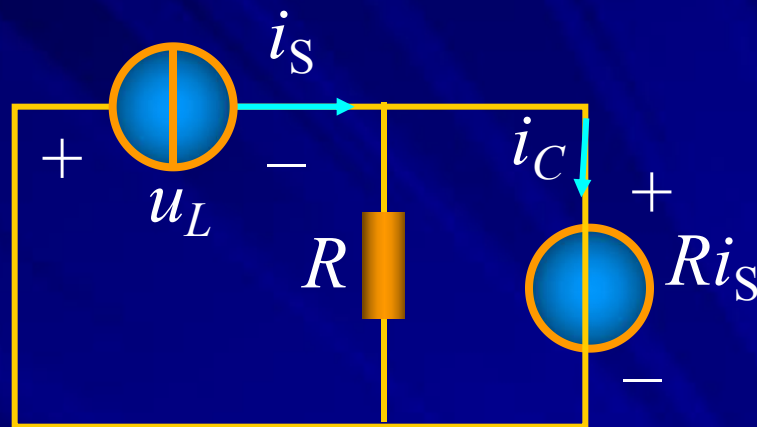
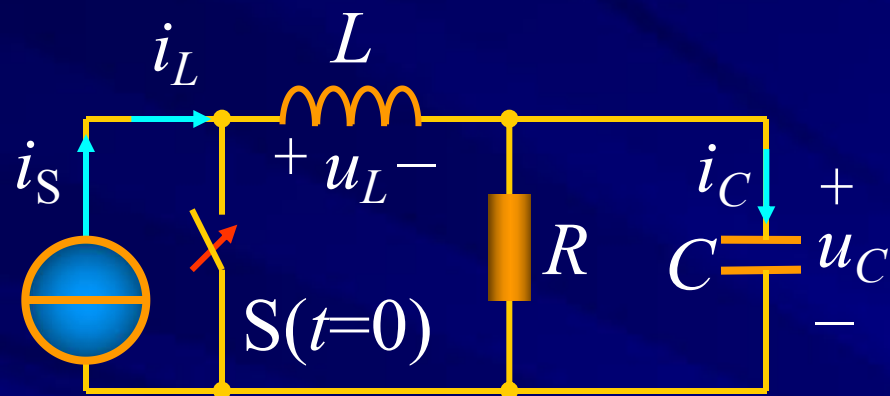
3. 画  $0_+$  等效电路。

- (1) 换路后的电路；
- (2) 电容（电感）用电压源（电流源）替代。

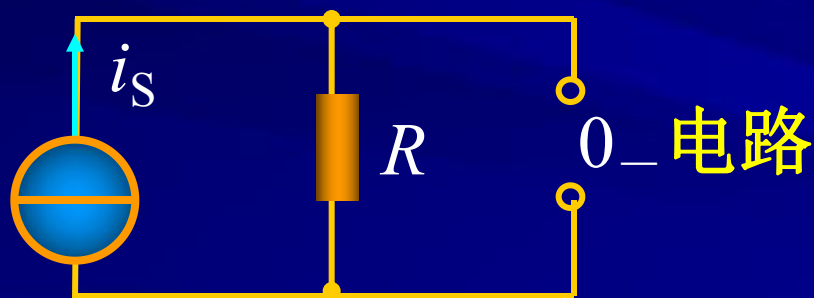
（取  $0_+$  时刻值，方向与原假定的电容电压、电感电流方向相同）。

4. 由  $0_+$  电路求所需各变量的  $0_+$  值。

例1-4 求  $i_C(0_+)$  ,  $u_L(0_+)$ 。



解 由  $0_-$  电路得



由  $0_+$  电路得

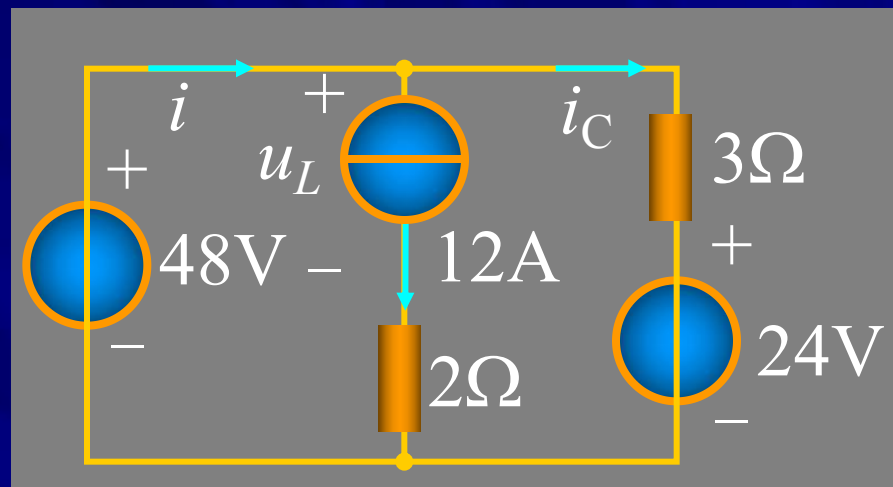
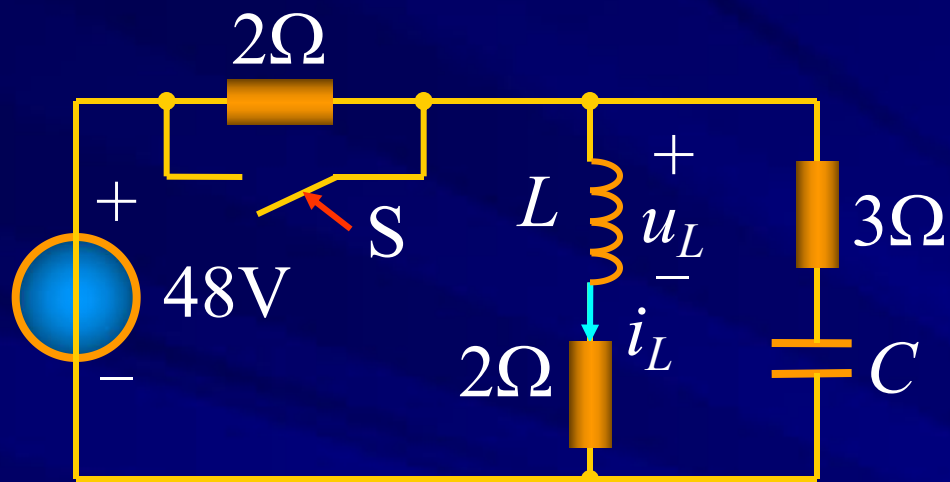
$$i_C(0_+) = i_S - \frac{Ri_S}{R} = 0$$

$$u_L(0_+) = -Ri_S$$

$$i_L(0_+) = i_L(0_-) = i_S$$

$$u_C(0_+) = u_C(0_-) = Ri_S$$

## 例1-5 求S闭合瞬间各支路电流和电感电压。

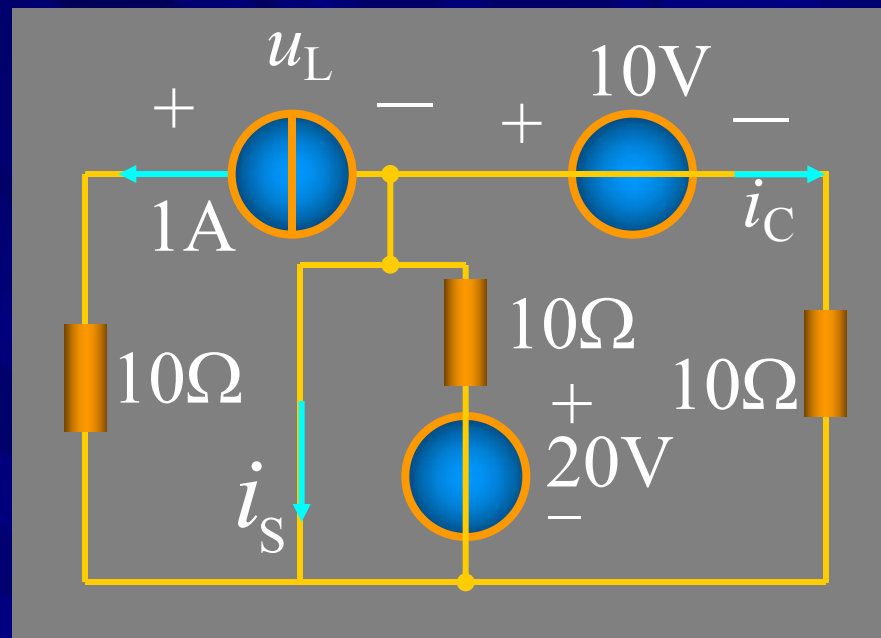
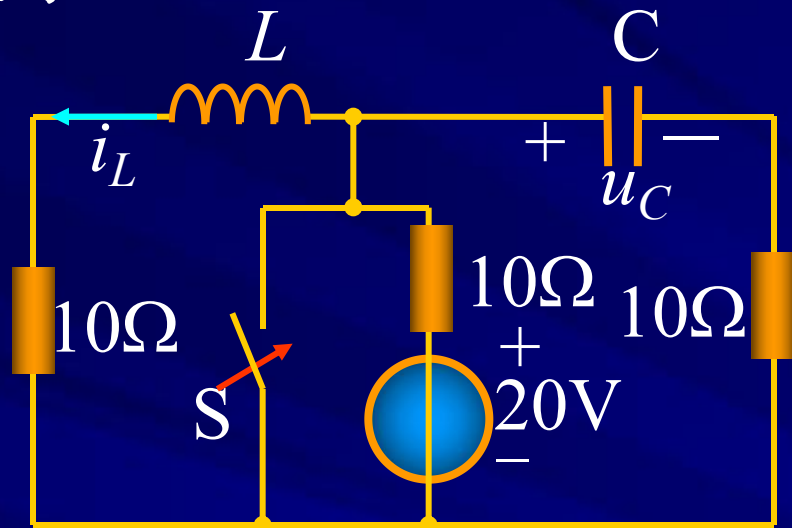
解 由 $0_-$ 电路得

$$\begin{aligned} i_L(0_+) &= i_L(0_-) \\ &= 48/4\text{A} = 12\text{A} \\ u_C(0_+) &= u_C(0_-) \\ &= 2 \times 12\text{V} = 24\text{V} \end{aligned}$$

由 $0_+$ 电路得

$$\begin{aligned} i_C(0_+) &= (48 - 24)/3\text{A} = 8\text{A} \\ i(0_+) &= (12 + 8)\text{A} = 20\text{A} \\ u_L(0_+) &= (48 - 2 \times 12)\text{V} = 24\text{V} \end{aligned}$$

# 例1-6 求S闭合瞬间流过它的电流值。



解 ①确定 $0_-$ 值

$$i_L(0_+) = i_L(0_-) = \frac{20}{20} \text{ A} = 1 \text{ A}$$

$$u_C(0_+) = u_C(0_-) = 10 \text{ V}$$

$$i_S(0_+) = \left( \frac{20}{10} + \frac{10}{10} - 1 \right) \text{ A} = 2 \text{ A}$$

$$u_L(0_+) = i_L(0_+) \times 10 = 10 \text{ V}$$

②给出 $0_+$ 等效电路

$$i_C(0_+) = -u_C(0_+)/10 = -1 \text{ A}$$

## 7-2 一阶电路的零输入响应

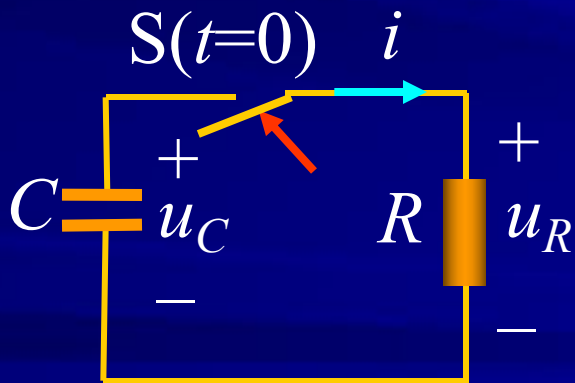
零输入响应



换路后外加激励为零，仅有动态元件初始储能产生的电压和电流。

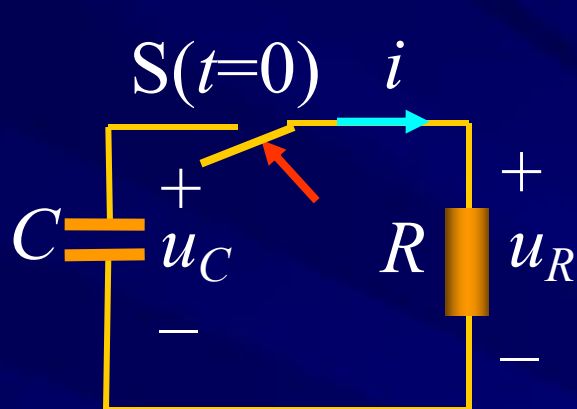
### 1. RC电路的零输入响应

已知  $u_C(0_-) = U_0$



$$-u_R + u_C = 0$$

$$\begin{cases} i = -C \frac{du_C}{dt} \\ u_R = Ri \end{cases}$$



$$\begin{cases} RC \frac{du_C}{dt} + u_C = 0 \\ u_C(0_+) = U_0 \end{cases}$$

特征方程

$$RCp + 1 = 0$$

特征根

$$p = -\frac{1}{RC}$$

则  $u_C = Ae^{pt} = Ae^{-\frac{1}{RC}t}$

代入初始值

$$u_C(0_+) = u_C(0_-) = U_0$$



$$A = U_0$$

$$u_C = U_0 e^{-\frac{t}{RC}} \quad t > 0$$

$$i = \frac{u_C}{R} = \frac{U_0}{R} e^{-\frac{t}{RC}} = I_0 e^{-\frac{t}{RC}} \quad t > 0$$

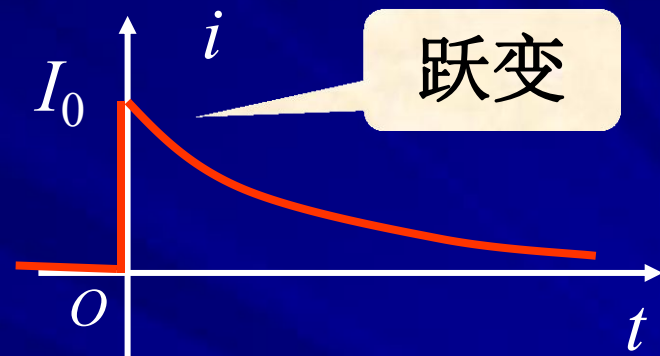
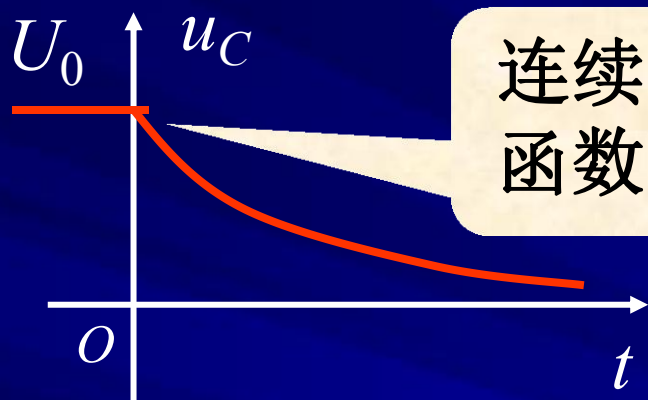
或

$$i = -C \frac{du_C}{dt} = -CU_0 e^{-\frac{t}{RC}} \left(-\frac{1}{RC}\right) = \frac{U_0}{R} e^{-\frac{t}{RC}}$$



表明

①电压、电流是随时间按同一指数规律衰减的函数。



②响应与初始状态成线性关系，其衰减快慢与 $RC$ 有关。

令  $\tau = RC$ ，称  $\tau$  为一阶电路的时间常数。

$$[\tau] = [RC] = [\text{欧}][\text{法}] = [\text{欧}] \left[ \frac{\text{库}}{\text{伏}} \right] = [\text{欧}] \left[ \frac{\text{安秒}}{\text{伏}} \right] = [\text{秒}]$$

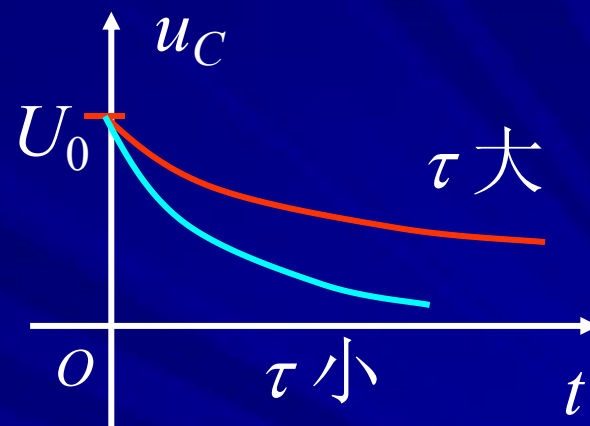
$$\tau = RC$$

$$p = -\frac{1}{RC} = -\frac{1}{\tau}$$

时间常数 $\tau$ 的大小反映了电路过渡过程时间的长短

$\tau$  大——过渡过程时间长

$\tau$  小——过渡过程时间短



物理含义

→ 电压初值一定：

$C$  大 ( $R$  一定)

$$W = Cu^2/2$$

储能大

$R$  大 ( $C$  一定)

$$i = u/R$$

放电电流小

} 放电时间长

| $t$                             | 0     | $\tau$       | $2\tau$      | $3\tau$      | $5\tau$      |
|---------------------------------|-------|--------------|--------------|--------------|--------------|
| $u_C = U_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$ | $U_0$ | $U_0 e^{-1}$ | $U_0 e^{-2}$ | $U_0 e^{-3}$ | $U_0 e^{-5}$ |
|                                 | $U_0$ | $0.368U_0$   | $0.135U_0$   | $0.05U_0$    | $0.007U_0$   |



注意

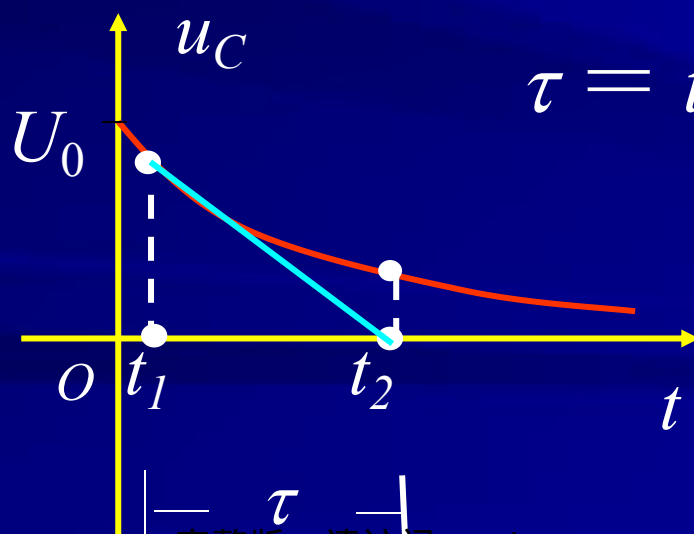
- ①  $\tau$ : 电容电压衰减到原来电压36.8%所需的时间。  
工程上认为，经过  $3\tau \sim 5\tau$ ，过渡过程结束。

## ②时间常数 $\tau$ 的几何意义：

$$u_C = U_0 e^{-\frac{t}{RC}}$$

$t_1$ 时刻曲线的斜率等于

$$\left. \frac{du_C}{dt} \right|_{t_1} = -\frac{U_0}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} \Big|_{t_1} = -\frac{1}{\tau} u_C(t_1) = \frac{u_C(t_1) - 0}{t_1 - t_2}$$



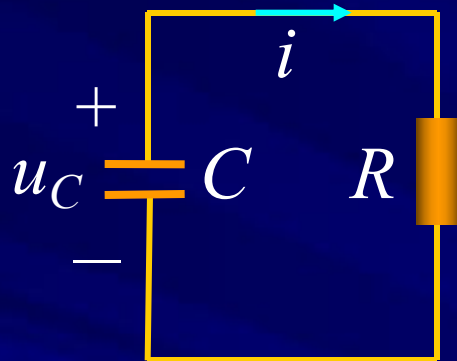
$\tau = t_2 - t_1 \rightarrow$  次切距的长度

$$u_C(t_2) = 0.368 u_C(t_1)$$

## ③能量关系



电容不断释放能量被电阻吸收，直到全部消耗完毕。



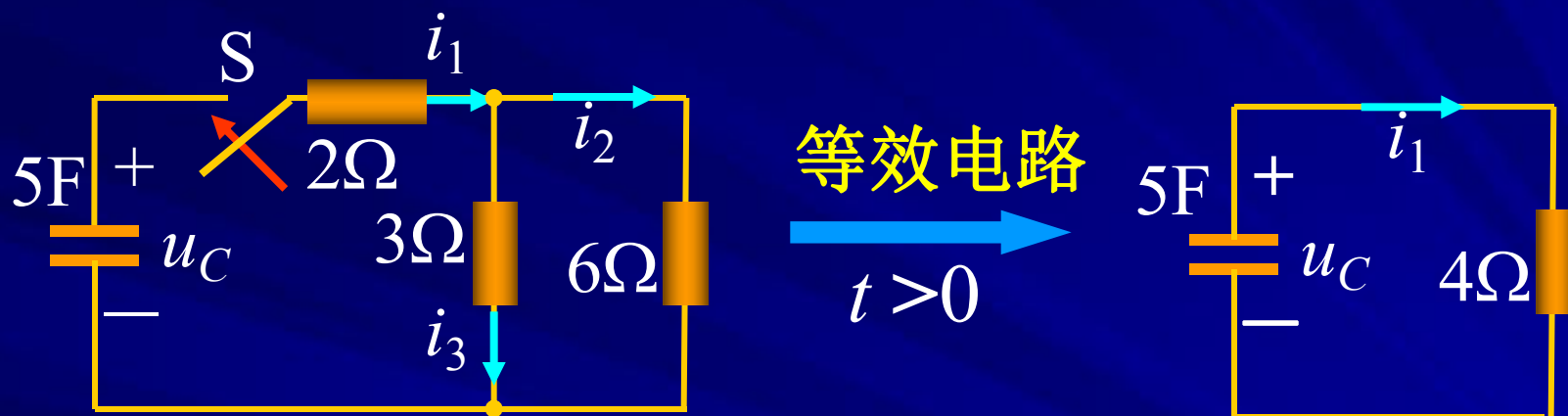
设  $u_C(0_+) = U_0$

电容放出能量：  $\longrightarrow \frac{1}{2}CU_0^2$

电阻吸收（消耗）能量：  $\longrightarrow$

$$\begin{aligned} W_R &= \int_0^\infty i^2 R dt = \int_0^\infty \left( \frac{U_0}{R} e^{-\frac{t}{RC}} \right)^2 R dt = \frac{U_0^2}{R} \int_0^\infty e^{-\frac{2t}{RC}} dt \\ &= \frac{U_0^2}{R} \left( -\frac{RC}{2} e^{-\frac{2t}{RC}} \right) \bigg|_0^\infty = \frac{1}{2} CU_0^2 \end{aligned}$$

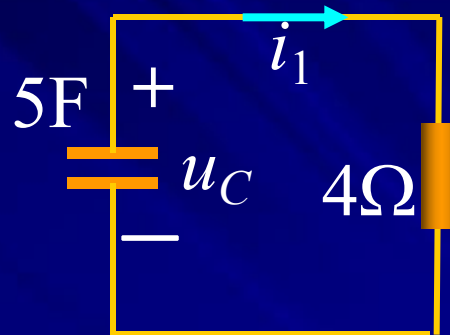
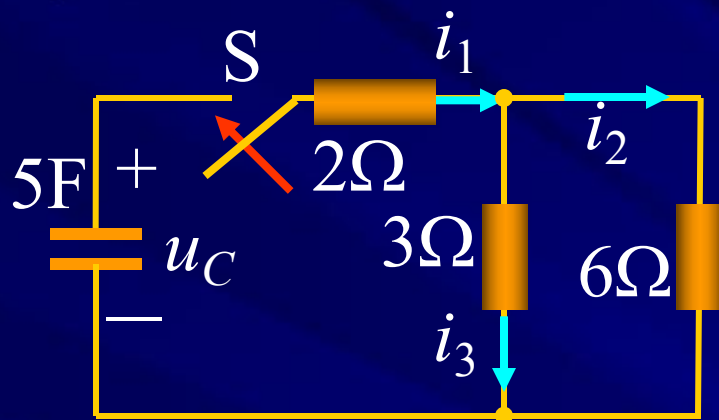
例2-1图示电路中的电容原充有24V电压，求S闭合后，电容电压和各支路电流随时间变化的规律。



**解** 这是一个求一阶RC零输入响应问题，有

$$u_C = U_0 e^{-\frac{t}{RC}} \quad t > 0$$

$$U_0 = 24\text{V} \quad \tau = RC = 5 \times 4\text{s} = 20\text{s}$$



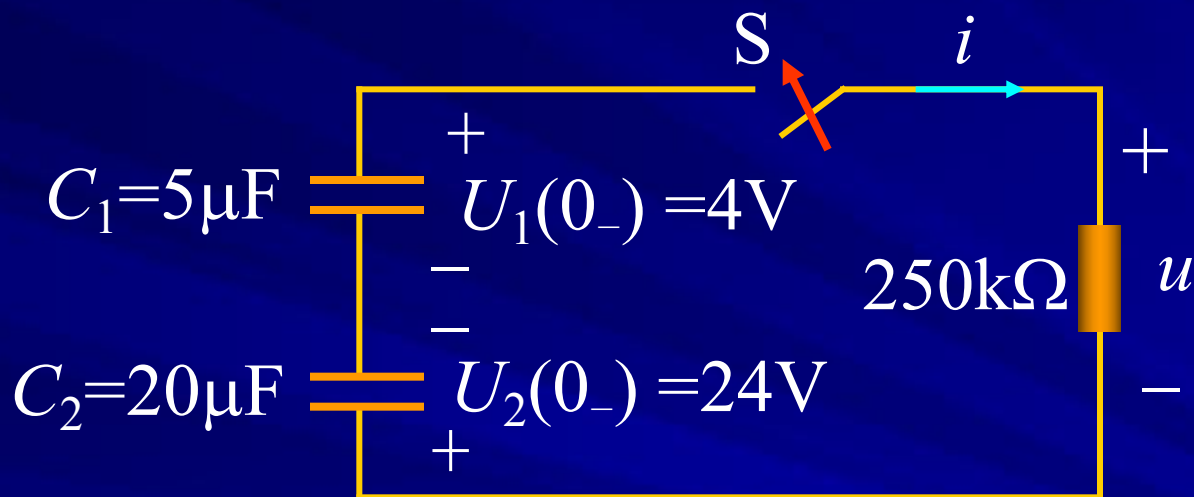
$$u_C = 24 e^{-\frac{t}{20}} \text{ V} \quad t > 0$$

$$i_1 = u_C / 4 = 6 e^{-\frac{t}{20}} \text{ A}$$

分流得

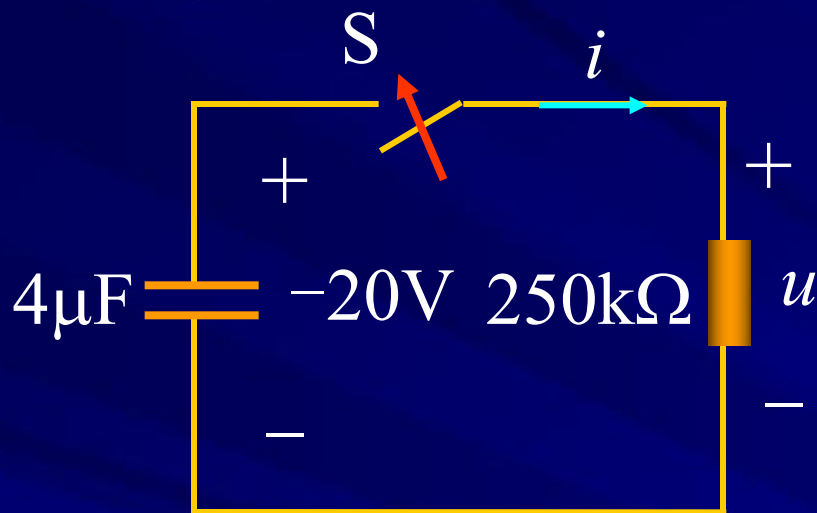
$$i_2 = \frac{1}{3} i_1 = 4 e^{-\frac{t}{20}} \text{ A} \quad i_3 = \frac{2}{3} i_1 = 2 e^{-\frac{t}{20}} \text{ A}$$

例2-2 求：(1) 图示电路S闭合后各元件的电压和电流随时间变化的规律；(2) 电容的初始储能和最终时刻的储能及电阻的耗能。



**解** 这是一个求一阶RC 零输入响应问题，有

$$C = \frac{C_2 C_1}{C_1 + C_2} = 4 \mu\text{F} \quad u(0_+) = u(0_-) = -20\text{V}$$



$$\tau = RC = 250 \times 4 \times 10^{-3} \text{ s} = 1 \text{ s}$$

$$u = -20e^{-t} \text{ V} \quad t > 0$$

$$i = \frac{u}{250 \times 10^3} = -80e^{-t} \mu\text{A}$$

$$\begin{aligned} u_1 &= u_1(0) - \frac{1}{C_1} \int_0^t i(\xi) d\xi = 4 - \frac{1}{5} \int_0^t -80e^{-t} dt \\ &= (-16e^{-t} + 20) \text{ V} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_2 &= u_2(0) + \frac{1}{C_2} \int_0^t i(\xi) d\xi = 24 + \frac{1}{20} \int_0^t -80e^{-t} dt \\ &= (4e^{-t} + 20) \text{ V} \end{aligned}$$

初始储能  $W_1 = \frac{1}{2}(5 \times 10^{-6} \times 16) \text{J} = 40 \mu\text{J}$

$$W_2 = \frac{1}{2}(20 \times 10^{-6} \times 24^2) \text{J} = 5760 \mu\text{J}$$

最终储能

$$W = W_1 + W_2 = \frac{1}{2}(5 + 20)10^{-6} \times 20^2 \text{J} = 5000 \mu\text{J}$$

电阻耗能

$$\begin{aligned} W_R &= \int_0^{\infty} Ri^2 dt = \int_0^t 250 \times 10^3 \times (80e^{-t})^2 dt = 800 \mu\text{J} \\ &= (5800 - 5000) \mu\text{J} \end{aligned}$$

## 2. $RL$ 电路的零输入响应

$$i_L(0_+) = i_L(0_-) = \frac{U_s}{R_1 + R} = I_0$$

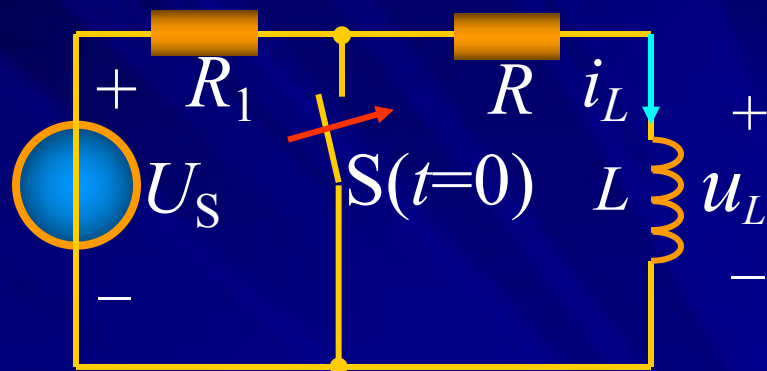
$$L \frac{di_L}{dt} + Ri_L = 0 \quad t > 0$$

特征方程  $Lp + R = 0$

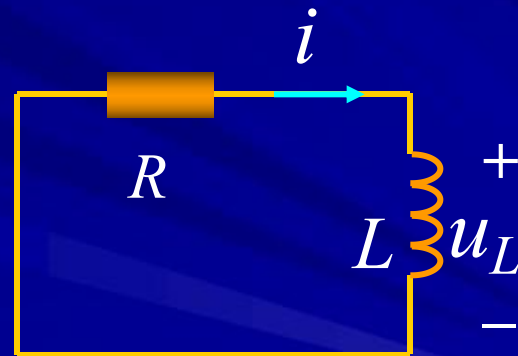
特征根  $p = -\frac{R}{L}$   $i_L(t) = Ae^{pt}$

代入初始值  $\longrightarrow A = i_L(0_+) = I_0$

$$\longrightarrow i_L(t) = I_0 e^{pt} = I_0 e^{-\frac{R}{L}t} \quad t > 0$$

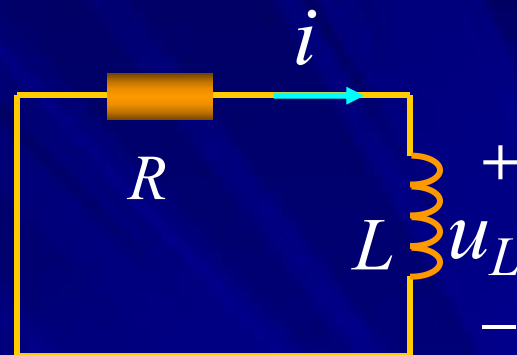


$t > 0$



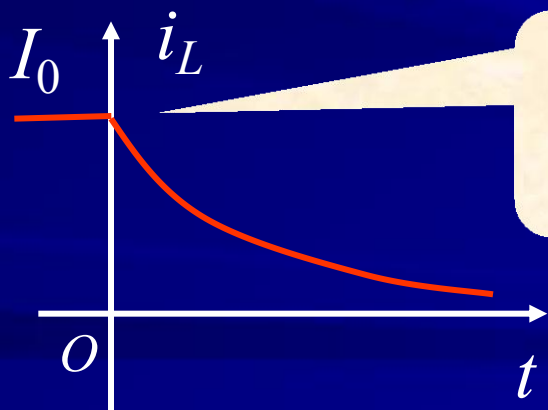
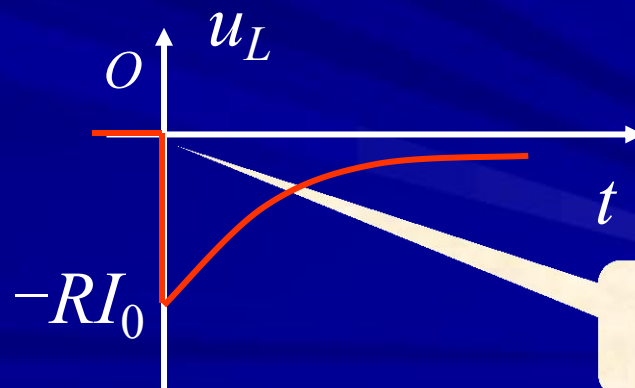
$$i_L(t) = I_0 e^{-\frac{t}{L/R}} \quad t > 0$$

$$u_L(t) = L \frac{di_L}{dt} = -RI_0 e^{-\frac{t}{L/R}}$$



表明

①电压、电流是随时间按同一指数规律衰减的函数。

连续  
函数

跃变

②响应与初始状态成线性关系，其衰减快慢与 $L/R$ 有关。

令  $\tau = L/R$  称为一阶 $RL$ 电路时间常数

$$[\tau] = \left[ \frac{L}{R} \right] = \left[ \frac{\text{亨}}{\text{欧}} \right] = \left[ \frac{\text{韦}}{\text{安欧}} \right] = \left[ \frac{\text{伏秒}}{\text{安欧}} \right] = [\text{秒}]$$

时间常数 $\tau$ 的大小反映了电路过渡过程时间的长短。

$\tau$  大——过渡过程时间长       $\tau$  小——过渡过程时间短

物理含义



电流初始值 $i_L(0)$ 一定：

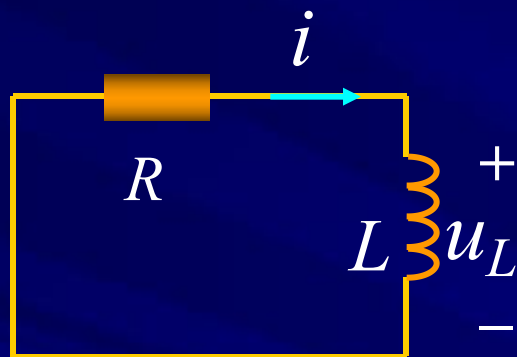
$L$ 大     $W = Li_L^2/2$     初始能量大

$R$ 小     $p = Ri^2$

放电过程消耗能量小

} 放电慢， $\tau$  大

③能量关系  $\longrightarrow$  电感不断释放能量被电阻吸收，直到全部消耗完毕。



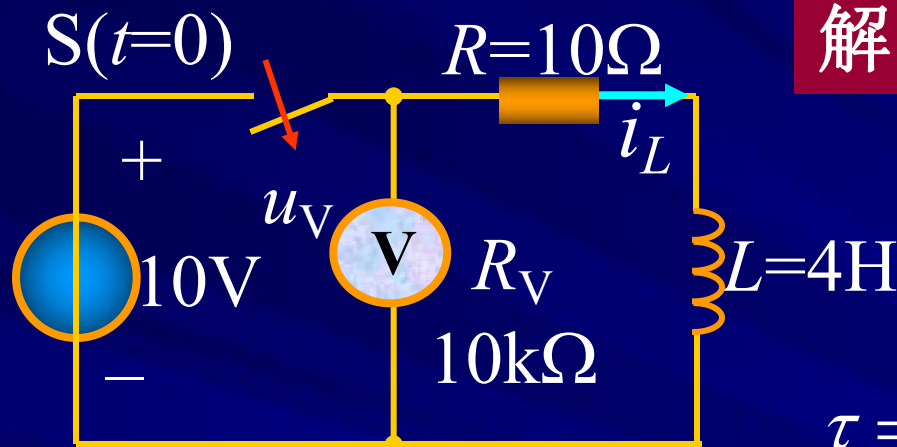
设  $i_L(0_+) = I_0$

电感放出能量： $\longrightarrow \frac{1}{2} L I_0^2$

电阻吸收（消耗）能量： $\longrightarrow$

$$\begin{aligned}
 W_R &= \int_0^{\infty} i^2 R dt = \int_0^{\infty} (I_0 e^{-\frac{t}{L/R}})^2 R dt \\
 &= I_0^2 R \int_0^{\infty} e^{-\frac{2t}{L/R}} dt = I_0^2 R \left( -\frac{L/R}{2} e^{-\frac{2t}{L/R}} \right) \bigg|_0^{\infty} = \frac{1}{2} L I_0^2
 \end{aligned}$$

例2-3  $t=0$ 时, 打开开关S, 求 $u_V$ 。电压表量程: 50V。



解

$$i_L(0_+) = i_L(0_-) = 1 \text{ A}$$

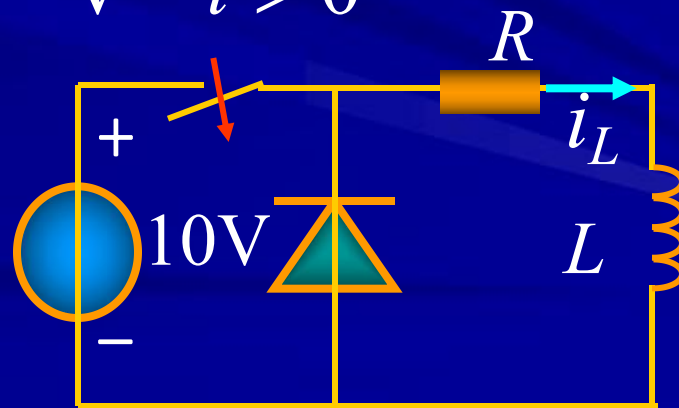
$$i_L = e^{-t/\tau} \quad t > 0$$

$$\tau = \frac{L}{R + R_V} \approx \frac{4}{10000} \text{ s} = 4 \times 10^{-4} \text{ s}$$

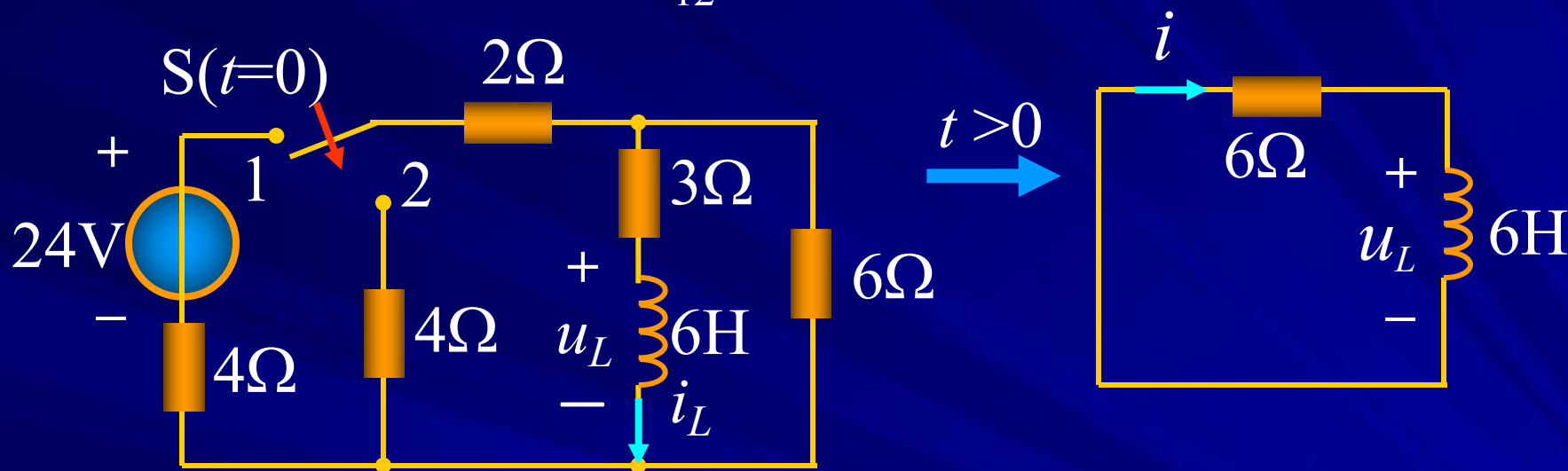
$$u_V = -R_V i_L = -10000 e^{-2500t} \text{ V} \quad t > 0$$

$$u_V(0_+) = -10000 \text{ V}$$

造成  损坏。



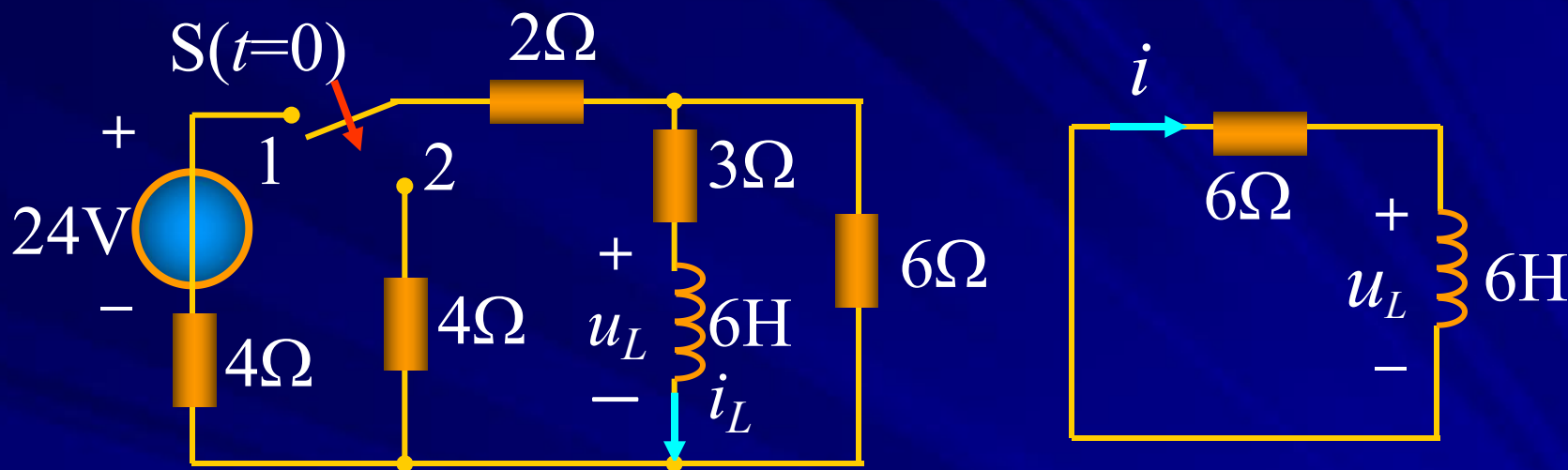
例2-4  $t=0$ 时, 开关S由1 $\rightarrow$ 2, 求电感电压和电流及开关两端电压 $u_{12}$ 。



解

$$i_L(0_+) = i_L(0_-) = \frac{24}{4 + 2 + \frac{3 \times 6}{3 + 6}} \times \frac{6}{3 + 6} \text{ A} = 2 \text{ A}$$

$$R = \left[ 3 + \frac{(2 + 4) \times 6}{(2 + 4) + 6} \right] \Omega = 6 \Omega \quad \tau = \frac{L}{R} = \frac{6}{6} \text{ s} = 1 \text{ s}$$



$$i_L = 2e^{-t} \text{ A} \quad u_L = L \frac{di_L}{dt} = -12e^{-t} \text{ V} \quad t > 0$$

$$u_{12} = 24 + 4 \times \frac{i_L}{2} = 24 + 4e^{-t} \text{ V}$$



## 小结

①一阶电路的零输入响应是由储能元件的初始值引起的响应，都是由初始值衰减为零的指数衰减函数。

$$y(t) = y(0_+)e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$RC$ 电路：  $u_C(0_+) = u_C(0_-)$

$RL$ 电路：  $i_L(0_+) = i_L(0_-)$



## 小结

②衰减快慢取决于时间常数 $\tau$ 。

$RC$   
电路

$$\tau = RC$$

$$\tau = L/R$$

$RL$   
电路

$R$ 为与动态元件相连的一端口电路的等效电阻。

③同一电路中所有响应具有相同的时间常数。

④一阶电路的零输入响应和初始值成正比，  
称为零输入线性。

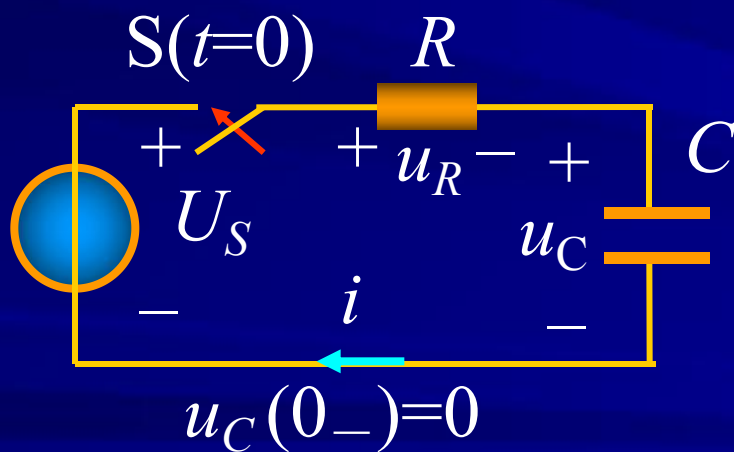
## 7-3 一阶电路的零状态响应

零状态响应

→ 动态元件初始能量为零，由  $t > 0$  时刻电路中外加激励作用所产生的响应。

非齐次线性常微分方程

### 1. RC电路的零状态响应



方程:  $RC \frac{du_C}{dt} + u_C = U_s$

解答形式为:

$$u_C = u'_C + u''_C$$

齐次方程通解

非齐次方程特解

$u'_C$  → 特解（强制分量）

$$RC \frac{du_C}{dt} + u_C = U_s \quad \text{的特解} \quad \rightarrow \quad u'_C = U_s$$

与输入激励的变化规律有关，为电路的稳态解。

$u''_C$  → 通解（自由分量，瞬态分量）

$$RC \frac{du_C}{dt} + u_C = 0 \quad \text{的通解} \quad \rightarrow \quad u''_C = A e^{-\frac{t}{RC}}$$

变化规律由电路参数和结构决定。

**全解**

$$u_C(t) = u'_C + u''_C = U_S + A e^{-\frac{t}{RC}}$$

由初始条件  $u_C(0_+) = 0$  定积分常数  $A$

$$u_C(0_+) = A + U_S = 0 \quad \rightarrow \quad A = -U_S$$

$$u_C = U_S - U_S e^{-\frac{t}{RC}} = U_S (1 - e^{-\frac{t}{RC}}) \quad (t > 0)$$

从以上式子可以得出

$$i = C \frac{du_C}{dt} = \frac{U_S}{R} e^{-\frac{t}{RC}}$$



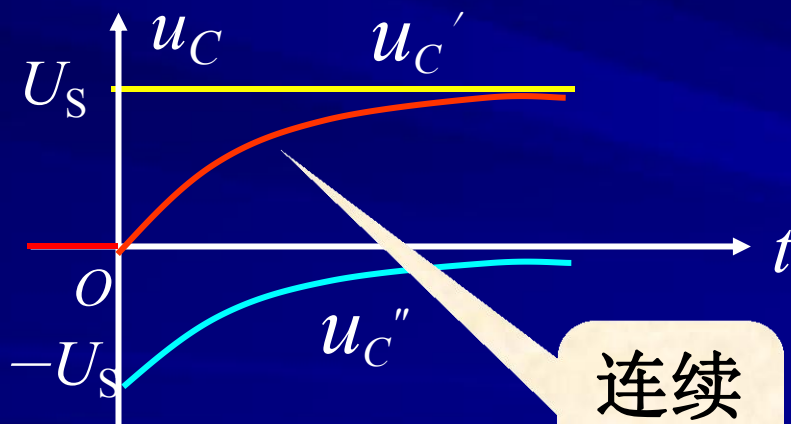
表明

①电压、电流是随时间按同一指数规律变化的函数；电容电压由两部分构成：

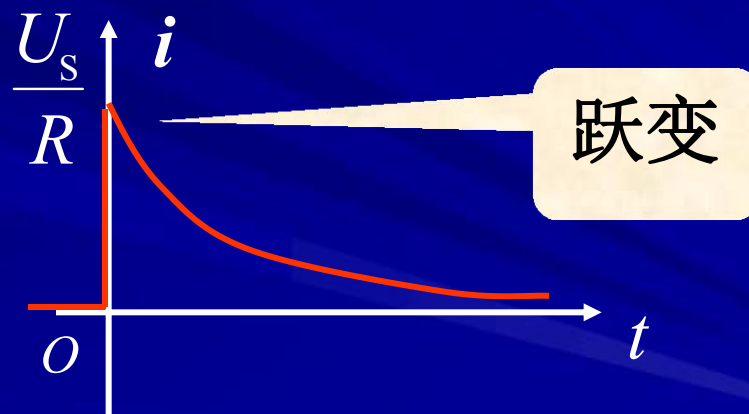
稳态分量（强制分量）

+

瞬态分量（自由分量）



连续  
函数

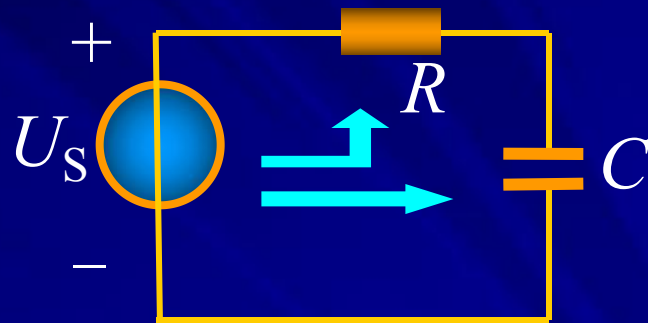


跃变

②响应变化的快慢，由时间常数 $\tau=RC$ 决定； $\tau$ 大，充电慢， $\tau$ 小充电就快。

③响应与外加激励成线性关系。

④能量关系：



电源提供能量  $\int_0^{\infty} U_S i dt = U_S q = CU_S^2$

电阻消耗能量  $\int_0^{\infty} i^2 R dt = \int_0^{\infty} \left( \frac{U_S}{R} e^{-\frac{t}{RC}} \right)^2 R dt = \frac{1}{2} CU_S^2$

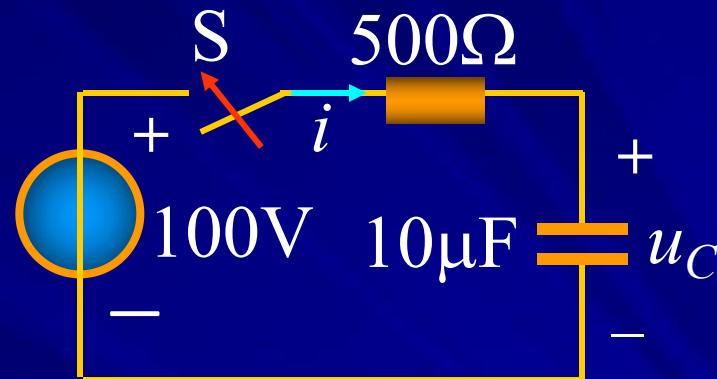
电容储存能量  $\frac{1}{2} CU_S^2$



**表明** 电源提供的能量一半消耗在电阻上，一半转换成电场能量储存在电容中。

例3-1  $t=0$ 时，开关S闭合，已知  $u_C(0_-)=0$ ，求(1) 电容电压和电流；(2)  $u_C=80\text{V}$ 时的充电时间  $t$ 。

**解** (1) 这是一个RC电路零状态响应问题，有：



$$\tau = RC = 500 \times 10^{-5} \text{ s} = 5 \times 10^{-3} \text{ s}$$

$$u_C = U_s (1 - e^{-\frac{t}{RC}}) = 100(1 - e^{-200t}) \text{ V} \quad (t > 0)$$

$$i = C \frac{du_C}{dt} = \frac{U_s}{R} e^{-\frac{t}{RC}} = 0.2 e^{-200t} \text{ A}$$

(2) 设经过  $t_1$  秒，  $u_C=80\text{V}$

$$80 = 100(1 - e^{-200t_1}) \rightarrow t_1 = 8.045 \text{ ms}$$

## 2. $RL$ 电路的零状态响应

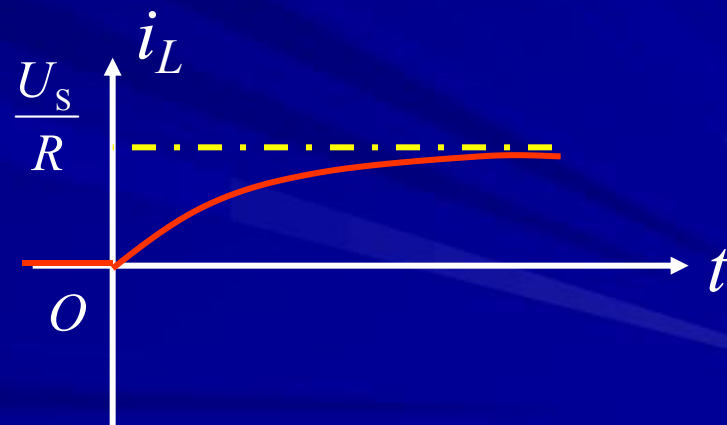
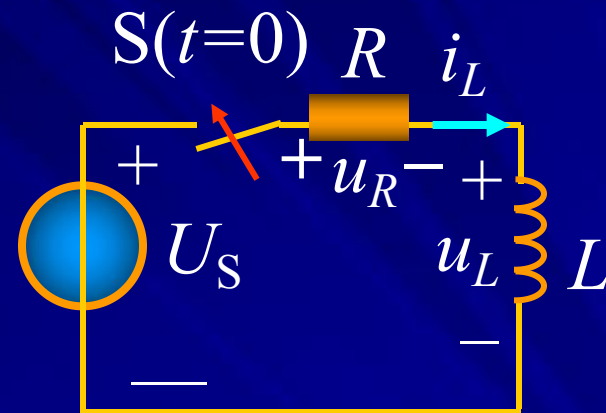
已知  $i_L(0_-)=0$ ，电路方程为

$$L \frac{di_L}{dt} + Ri_L = U_S$$

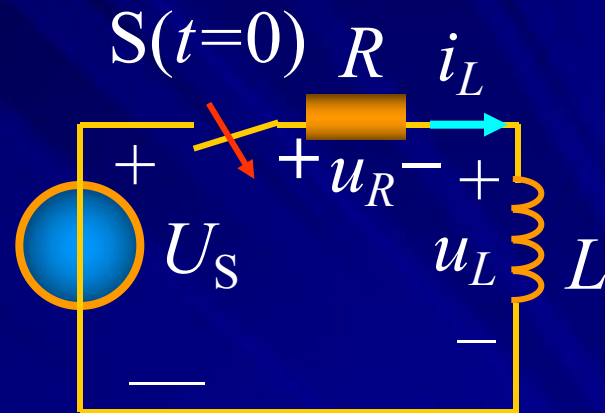
$$i_L = i'_L + i''_L = \frac{U_S}{R} + Ae^{-\frac{R}{L}t}$$

$$i_L(0_+) = 0 \rightarrow A = -\frac{U_S}{R}$$

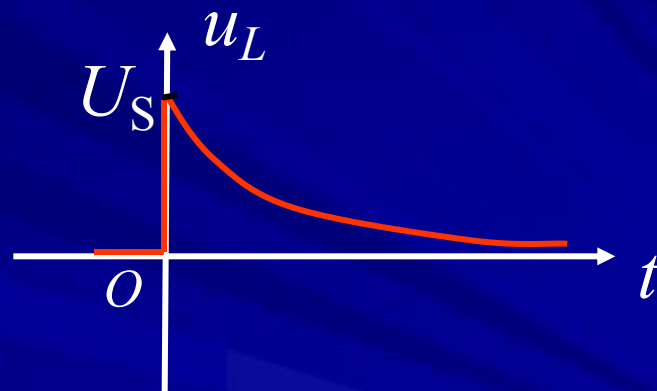
$$i_L = \frac{U_S}{R} (1 - e^{-\frac{R}{L}t})$$



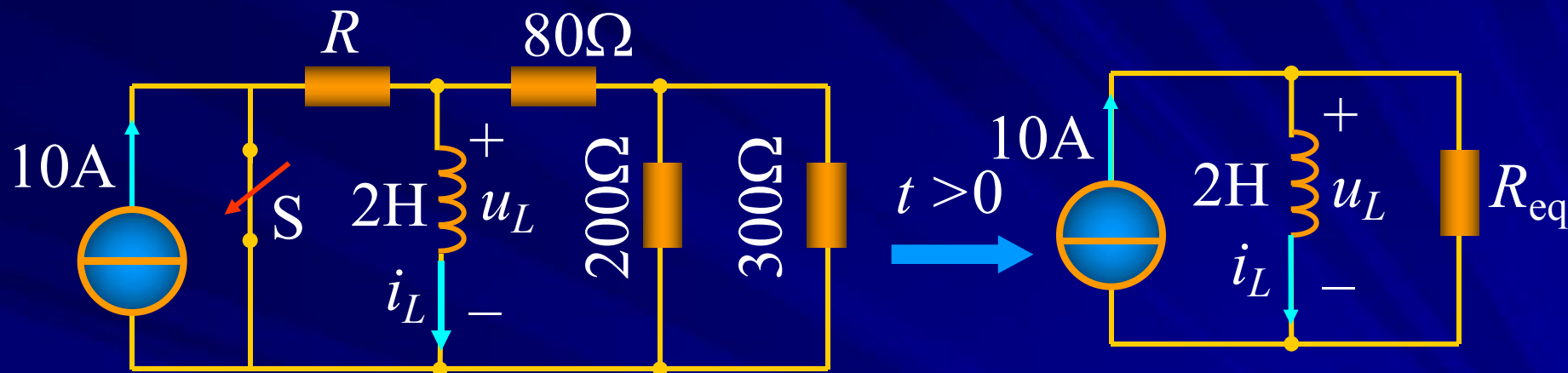
$$i_L = \frac{U_S}{R} (1 - e^{-\frac{R}{L}t})$$



$$u_L = L \frac{di_L}{dt} = U_S e^{-\frac{R}{L}t}$$



例3-2  $t=0$ 时, 开关S打开, 求 $t>0$ 后 $i_L$ 、 $u_L$ 的变化规律。



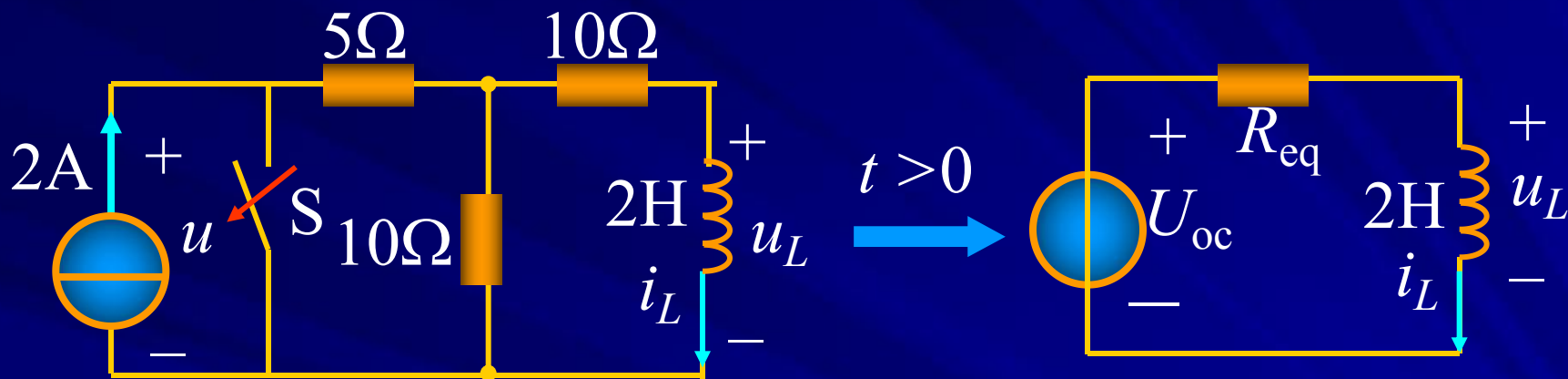
**解** 这是 $RL$ 电路零状态响应问题, 先化简电路, 有

$$R_{eq} = 80 + \frac{200 \times 300}{200 + 300} \Omega = 200 \Omega \quad \tau = \frac{L}{R_{eq}} = \frac{2}{200} \text{s} = 0.01 \text{s}$$

$$i_L' = 10 \text{A} \quad i_L(t) = 10(1 - e^{-100t}) \text{A}$$

$$u_L(t) = 10 \times R_{eq} e^{-100t} = 2000 e^{-100t} \text{V}$$

例3-3  $t=0$  开关S打开，求  $t>0$  后  $i_L$ 、 $u_L$  及电流源的电压。



**解** 这是  $RL$  电路零状态响应问题，先化简电路，有

$$R_{eq} = 10 + 10\Omega = 20\Omega \quad U_{oc} = 2 \times 10V = 20V$$

$$\tau = L / R_{eq} = 0.1s \quad i_L' = U_{oc} / R_{eq} = 1A$$

$$i_L(t) = (1 - e^{-10t})A \quad u_L(t) = U_{oc} e^{-10t} = 20e^{-10t}V$$

$$u = 5I_S + 10i_L + u_L = (20 + 10e^{-10t})V$$

## 7-4 一阶电路的全响应

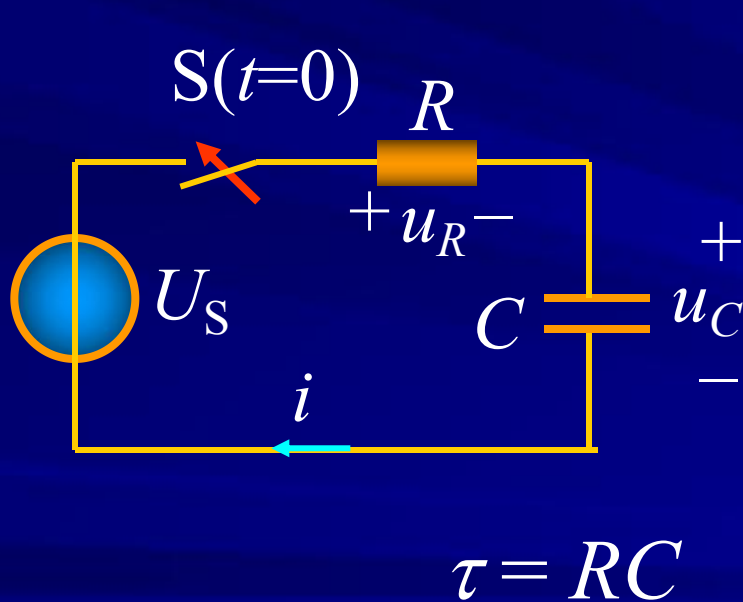
全响应



电路的初始状态不为零，同时又有外加激励源作用时电路中产生的响应。

### 1. 全响应

以RC电路为例，电路微分方程：



$$RC \frac{du_C}{dt} + u_C = U_s$$

解答为  $u_C(t) = u_C' + u_C''$

$$\begin{cases} \text{特解} & u_C' = U_s \\ \text{通解} & u_C'' = A e^{-\frac{t}{\tau}} \end{cases}$$

由初始值定  $A$   $u_C(0_-) = U_0$

$$u_C(0_+) = A + U_S = U_0 \rightarrow A = U_0 - U_S$$

$$u_C = U_S + Ae^{\frac{-t}{\tau}} = U_S + (U_0 - U_S)e^{\frac{-t}{\tau}} \quad t > 0$$

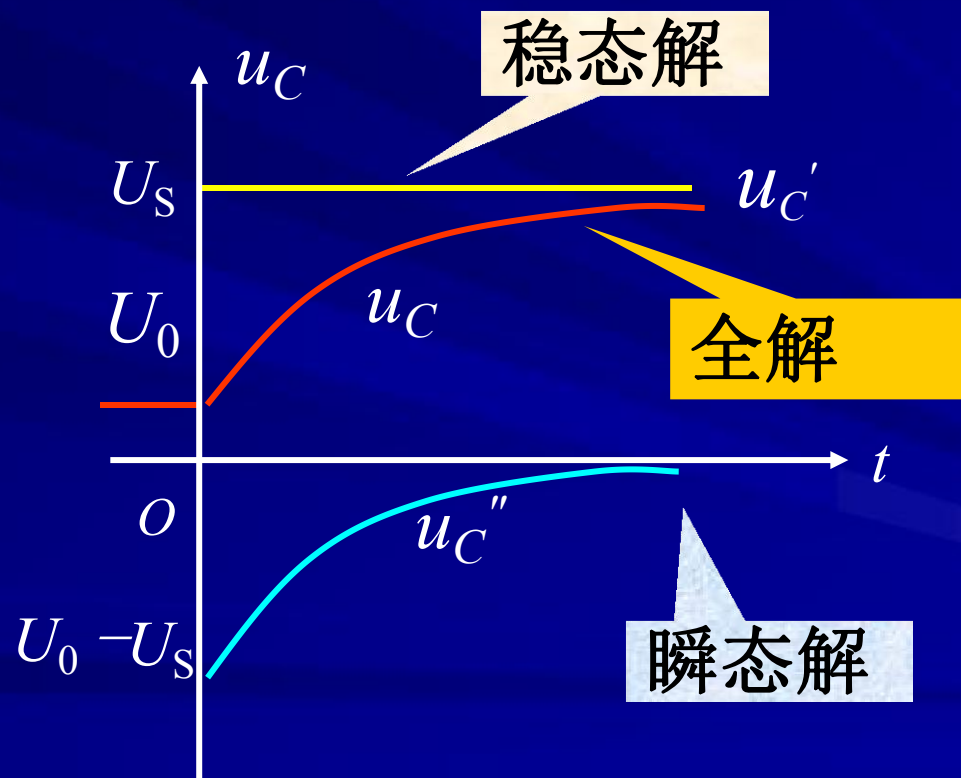
强制分量(稳态解)

自由分量(瞬态解)

## 2. 全响应的两种分解方式

①着眼于电路的两种工作状态 → 物理概念清晰

全响应 = 强制分量(稳态解) + 自由分量(瞬态解)



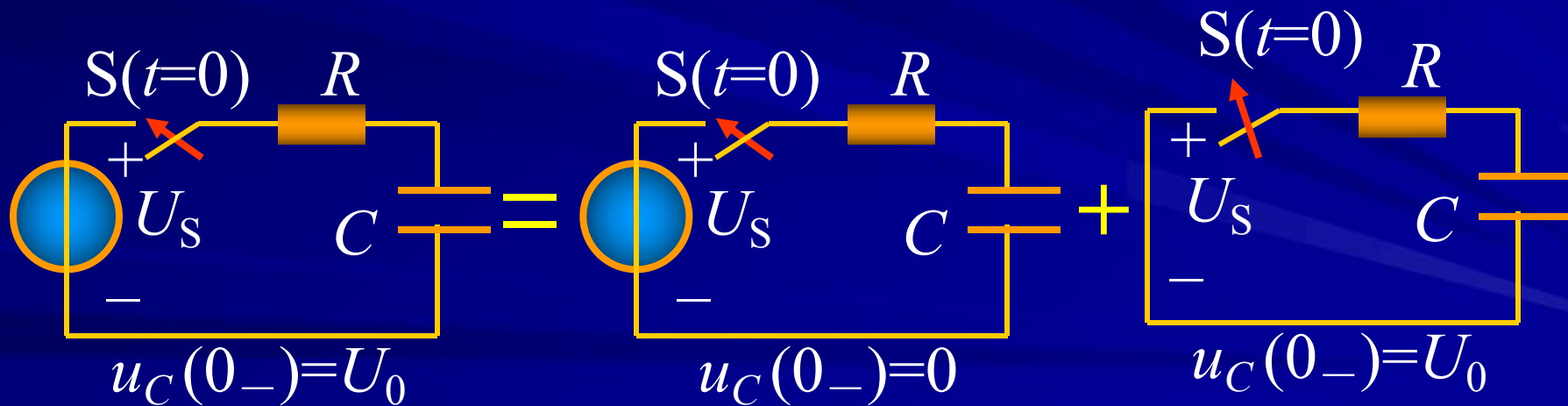
## ②着眼于因果关系 → 便于叠加计算

$$u_C = U_S (1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) + U_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (t > 0)$$

零状态响应

零输入响应

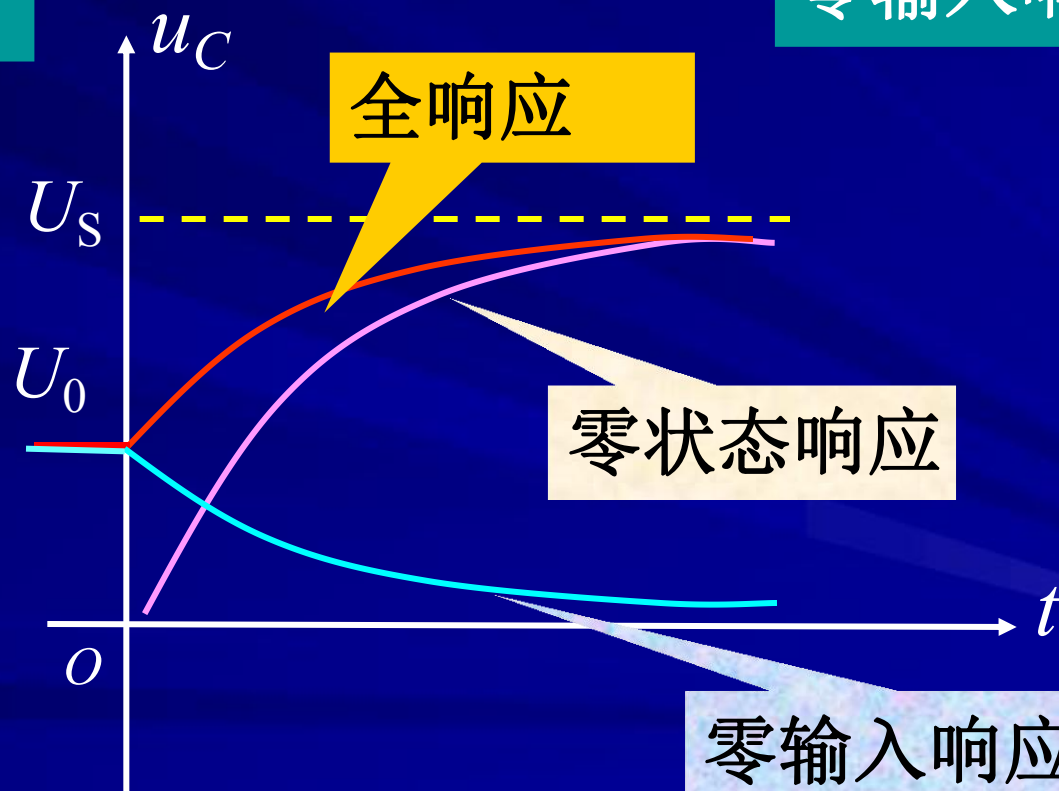
全响应 = 零状态响应 + 零输入响应



$$u_C = U_S(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) + U_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (t > 0)$$

零状态响应

零输入响应

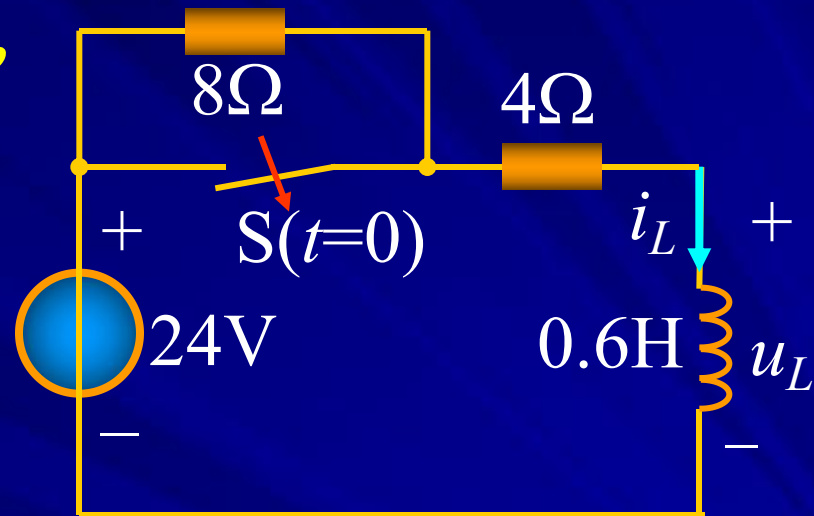


例4-1  $t=0$  时，开关S打开，求 $t>0$ 后的 $i_L$ 、 $u_L$ 。

**解** 这是 $RL$ 电路全响应问题，

$$\begin{aligned} \text{有 } i_L(0_+) &= i_L(0_-) \\ &= 24 / 4\text{A} = 6\text{A} \end{aligned}$$

$$\tau = \frac{L}{R} = \frac{0.6}{12}\text{s} = \frac{1}{20}\text{s}$$



零输入响应:  $i_L^{(1)}(t) = 6e^{-20t}\text{A}$

零状态响应:  $i_L^{(2)}(t) = \frac{24}{12}(1 - e^{-20t})\text{A}$

全响应:  $i_L(t) = 6e^{-20t} + 2(1 - e^{-20t}) = (2 + 4e^{-20t})\text{A}$

或求出稳态分量  $i_L(\infty) = 24/12\text{A} = 2\text{A}$

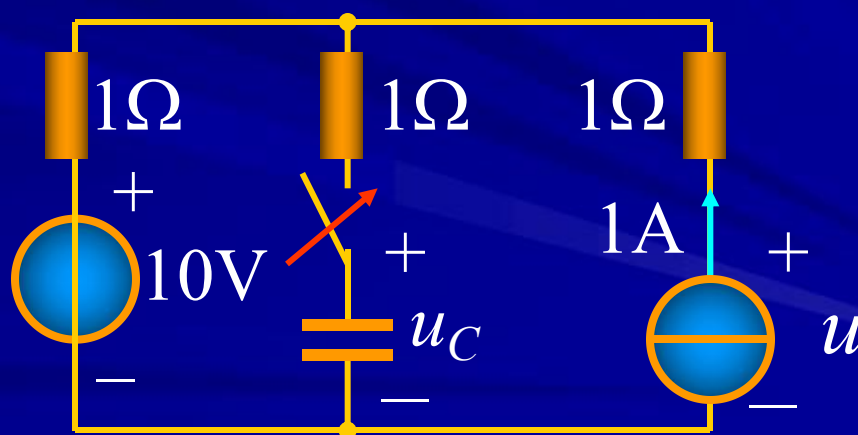
全响应  $i_L(t) = (2 + Ae^{-20t})\text{A}$

代入初值有  $6 = 2 + A \rightarrow A = 4$

例4-2  $t=0$ 时，开关S闭合，求 $t>0$ 后的 $i_C$ 、 $u_C$ 及电流源两端的电压（ $u_C(0_-)=1\text{V}$ ， $C=1\text{F}$ ）。

**解** 这是RC电路全响应问题，有  
稳态分量：

$$u_C(\infty) = (10 + 1)\text{V} = 11\text{V}$$



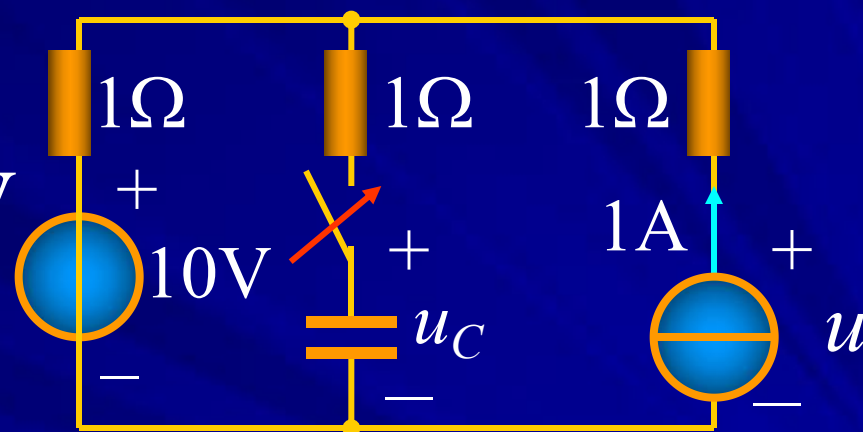
$$\tau = RC = (1+1) \times 1s = 2s$$

全响应：  $u_C(t) = (11 + Ae^{-0.5t})V$

$$u_C(t) = (11 - 10e^{-0.5t})V$$

$$i_C(t) = \frac{du_C}{dt} = 5e^{-0.5t} A$$

$$u(t) = 1 \times 1 + 1 \times i_C + u_C = (12 - 5e^{-0.5t})V$$



### 3. 三要素法分析一阶电路

一阶电路的数学模型是一阶线性微分方程：

$$a \frac{df}{dt} + bf = c$$

特解

其解答一般形式为： $f(t) = f'(t) + Ae^{-\frac{t}{\tau}}$

令  $t = 0_+$   $f(0_+) = f'(t)|_{0_+} + A$

$\longrightarrow A = f(0_+) - f'(t)|_{0_+}$

$$f(t) = f'(t) + [f(0_+) - f'(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}}$$

直流激励时：  $f'(t) = f'(0_+) = f(\infty)$

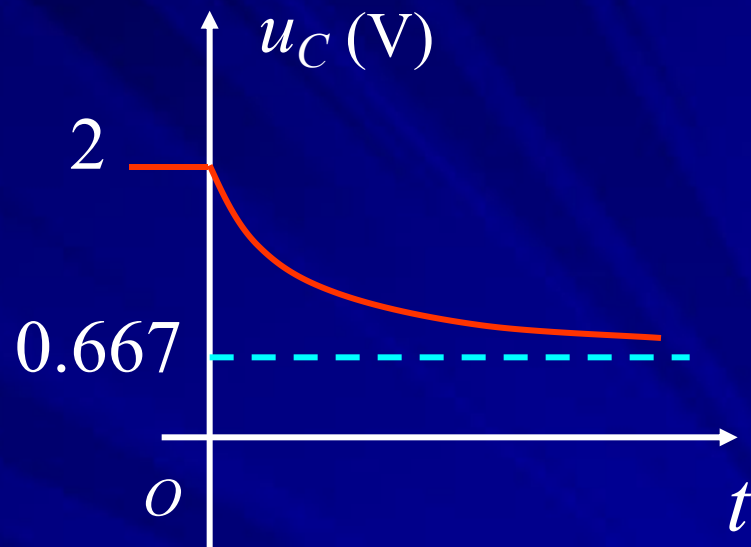
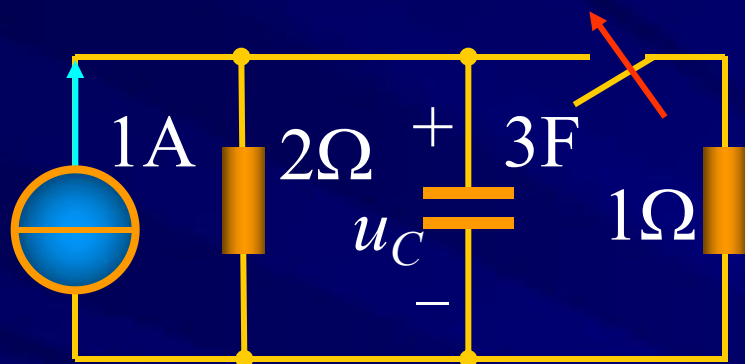
→  $f(t) = f(\infty) + \overbrace{[f(0_+) - f(\infty)]}^A e^{-\frac{t}{\tau}}$

三要素  $\left\{ \begin{array}{l} f(\infty) \text{ 稳态解} \rightarrow \text{用 } t \rightarrow \infty \text{ 的稳态电路求解} \\ f(0_+) \text{ 初始值} \rightarrow \text{用 } 0_+ \text{ 等效电路求解} \\ \tau \quad \text{时间常数} \end{array} \right.$



**注意** 分析一阶电路问题转为求解电路的三个要素的问题。

例4-3 已知： $t=0$  时合开关，求换路后的  $u_C(t)$ 。



解

$$u_C(0_+) = u_C(0_-) = 2V$$

$$u_C(\infty) = \frac{2 \times 1}{2 + 1} \times 1V = 0.667V \quad \tau = R_{eq}C = \frac{2}{3} \times 3s = 2s$$

$$u_C(t) = u_C(\infty) + [u_C(0_+) - u_C(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$u_C = 0.667 + (2 - 0.667)e^{-0.5t}V$$

$$= (0.667 + 1.33e^{-0.5t})V \quad t > 0$$

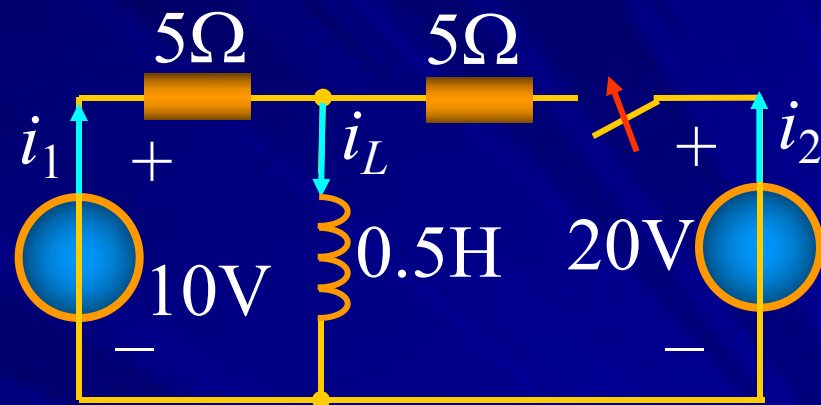
例4-4  $t=0$ 时，开关闭合，求 $t>0$ 后的 $i_L$ 、 $i_1$ 、 $i_2$ 。

解法1 三要素为

$$i_L(0_+) = i_L(0_-) = \frac{10}{5} \text{ A} = 2 \text{ A}$$

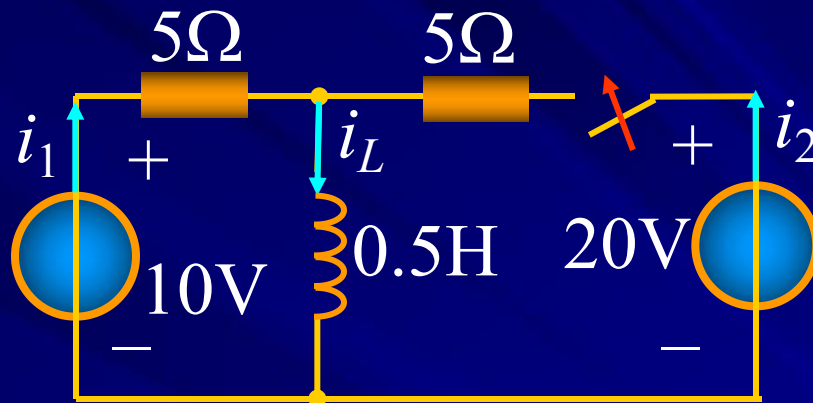
$$i_L(\infty) = \left( \frac{10}{5} + \frac{20}{5} \right) \text{ A} = 6 \text{ A}$$

$$\tau = \frac{L}{R} = 0.5 / \left( \frac{5 \times 5}{5 + 5} \right) \text{ s} = \frac{1}{5} \text{ s}$$



三要素公式 
$$i_L(t) = i_L(\infty) + [i_L(0_+) - i_L(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$i_L(t) = [6 + (2 - 6)e^{-5t}] \text{ A} = (6 - 4e^{-5t}) \text{ A} \quad t > 0$$



$$i_L(t) = [6 + (2 - 6)e^{-5t}] \text{A} = (6 - 4e^{-5t}) \text{A} \quad t > 0$$

$$u_L(t) = L \frac{di_L}{dt} = 0.5 \times (-4e^{-5t}) \times (-5) \text{V} = 10e^{-5t} \text{V}$$

$$i_1(t) = (10 - u_L) / 5 = (2 - 2e^{-5t}) \text{A}$$

$$i_2(t) = (20 - u_L) / 5 = (4 - 2e^{-5t}) \text{A}$$

## 解法2 三要素为

$$i_L(0_+) = 2\text{A} \quad i_L(\infty) = 6\text{A}$$

$$\tau = L / R = 1 / 5\text{s}$$

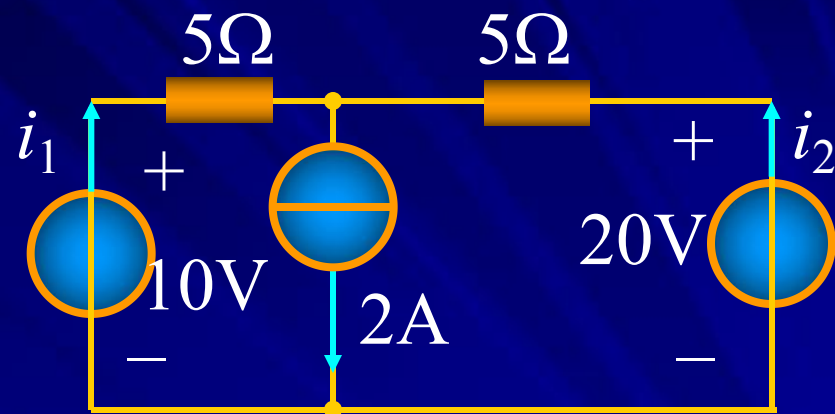
$$i_1(0_+) = \left[ \frac{(10 - 20)}{10} + 1 \right] \text{A} = 0\text{A}$$

$$i_2(0_+) = \left[ \frac{(20 - 10)}{10} + 1 \right] \text{A} = 2\text{A}$$

$$i_L(t) = [6 + (2 - 6)e^{-5t}] \text{A} = (6 - 4e^{-5t}) \text{A} \quad t > 0$$

$$i_1(t) = [2 + (0 - 2)e^{-5t}] \text{A} = (2 - 2e^{-5t}) \text{A}$$

$$i_2(t) = [4 + (2 - 4)e^{-5t}] \text{A} = (4 - 2e^{-5t}) \text{A}$$

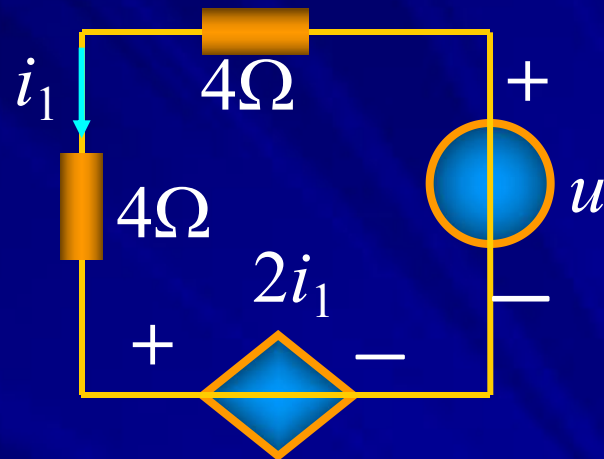
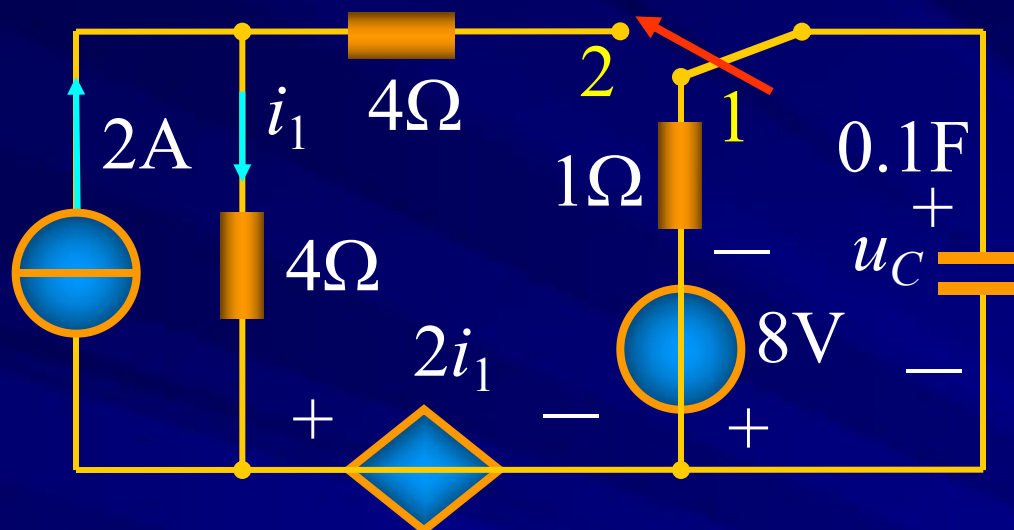


$0_+$  等效电路

$$i_1(\infty) = 10 / 5\text{A} = 2\text{A}$$

$$i_2(\infty) = 20 / 5\text{A} = 4\text{A}$$

例4-5 已知： $t=0$ 时开关由1 $\rightarrow$ 2，求换路后的 $u_C(t)$ 。



解

三要素为

$$u_C(0_+) = u_C(0_-) = -8V$$

$$u_C(\infty) = 4i_1 + 2i_1 = 6i_1 = 12V$$

$$u = 10i_1 \rightarrow R_{eq} = u / i_1 = 10\Omega$$

$$\longrightarrow \tau = R_{\text{eq}} C = 10 \times 0.1 \text{s} = 1 \text{s}$$

$$u_C(t) = u_C(\infty) + [u_C(0^+) - u_C(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$u_C(t) = [12 + (-8 - 12)e^{-t}] \text{V} = (12 - 20e^{-t}) \text{V}$$

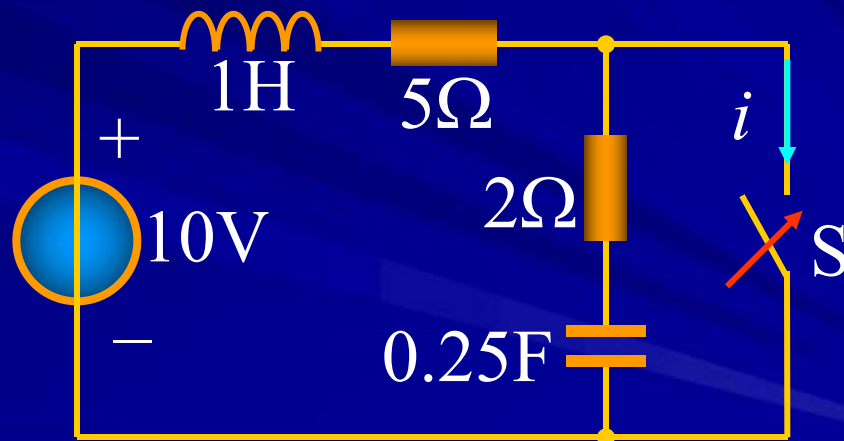
例4-6 已知：  $t=0$  时开关闭合，求换路后的电流  $i(t)$ 。

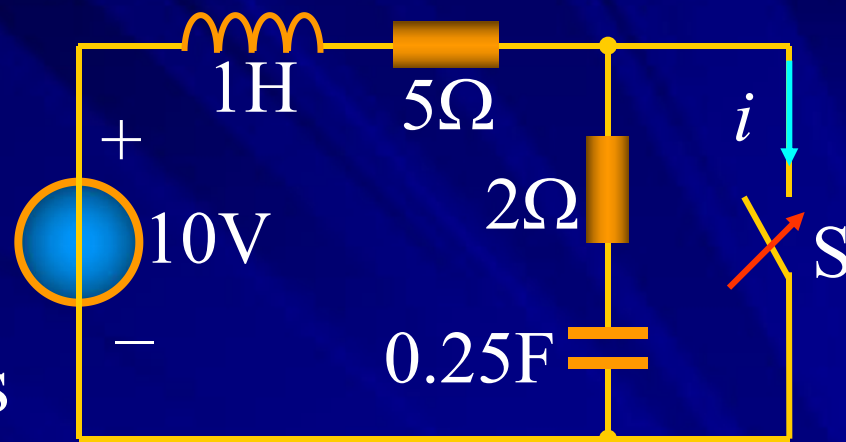
**解** 三要素为

$$u_C(0_+) = u_C(0_-) = 10 \text{V}$$

$$u_C(\infty) = 0$$

$$\tau_1 = R_{\text{eq}} C = 2 \times 0.25 \text{s} = 0.5 \text{s}$$





$$i_L(0_+) = i_L(0_-) = 0$$

$$i_L(\infty) = 10 / 5 \text{ A} = 2 \text{ A}$$

$$\tau_2 = L / R_{\text{eq}} = 1 / 5 \text{ s} = 0.2 \text{ s}$$

$$u_C(t) = u_C(\infty) + [u_C(0^+) - u_C(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}} = 10e^{-2t} \text{ V}$$

$$i_L(t) = i_L(\infty) + [i_L(0^+) - i_L(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}} = 2(1 - e^{-5t}) \text{ A}$$

$$i(t) = i_L(t) + \frac{u_C(t)}{2} = [2(1 - e^{-5t}) + 5e^{-2t}] \text{ A}$$

例4-7 已知：电感无初始储能 $t = 0$  时合 $S_1$ ， $t = 0.2\text{s}$  时合 $S_2$ ，求两次换路后的电感电流 $i(t)$ 。

解

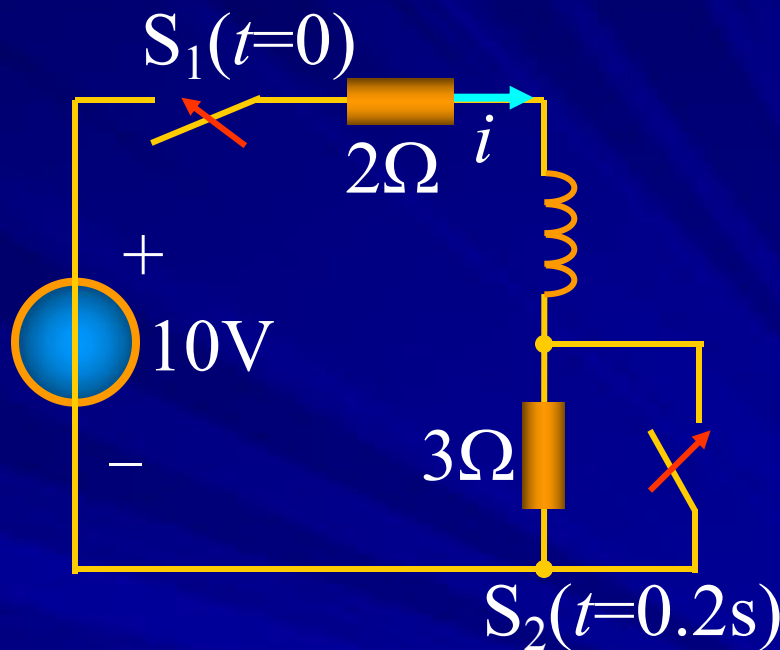
$$0 < t < 0.2\text{s}$$

$$i(0_+) = i(0_-) = 0$$

$$\tau_1 = L / R = 1 / 5\text{s} = 0.2\text{s}$$

$$i(\infty) = 10 / 5\text{A} = 2\text{A}$$

$$i(t) = (2 - 2e^{-5t})\text{A}$$



$$t > 0.2s$$

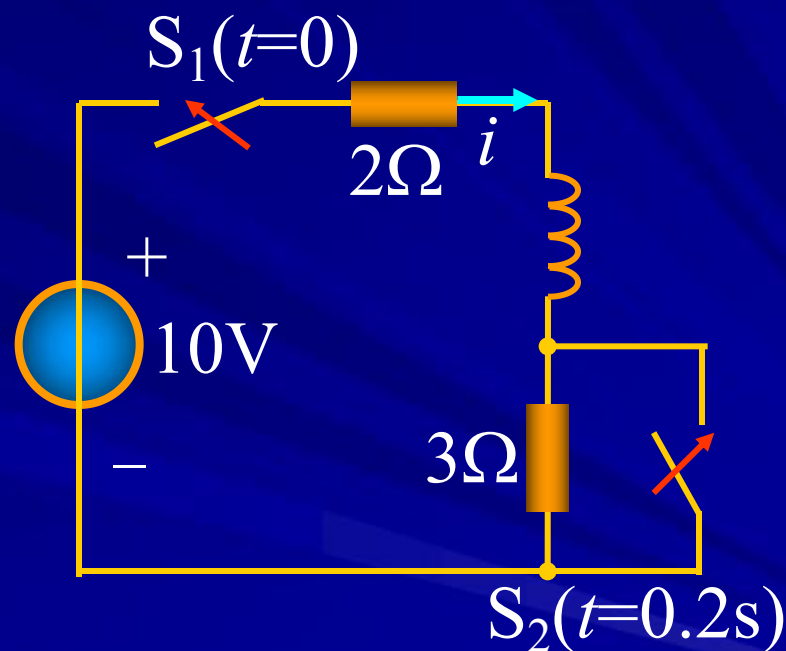
$$i(0.2_-) = (2 - 2e^{-5 \times 0.2}) A = 1.26 A$$

$$i(0.2_+) = 1.26 A$$

$$\tau_2 = L / R = 1/2 s = 0.5 s$$

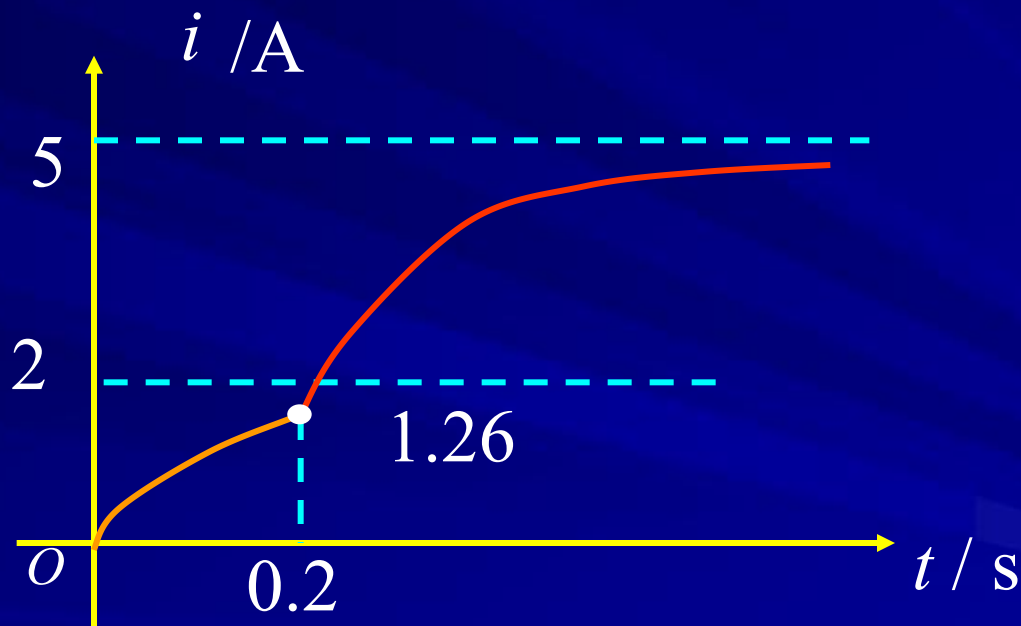
$$i(\infty) = 10/2 A = 5 A$$

$$i(t) = (5 - 3.74e^{-2(t-0.2)}) A$$



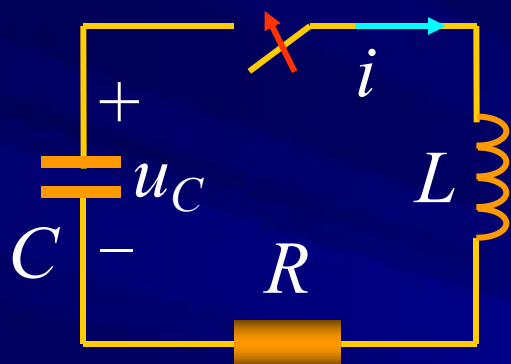
$$i = (2 - 2e^{-5t}) \text{ A} \quad (0 < t < 0.2 \text{ s})$$

$$i = (5 - 3.74e^{-2(t-0.2)}) \text{ A} \quad (t > 0.2 \text{ s})$$



## 7-5 二阶电路的零输入响应

### 1. 二阶电路的零输入响应



已知： $u_C(0_+) = U_0$   $i(0_+) = 0$

电路方程： $Ri + u_L - u_C = 0$

$$i = -C \frac{du_C}{dt} \quad u_L = L \frac{di}{dt}$$

以电容电压为变量： $LC \frac{d^2 u_C}{dt^2} + RC \frac{du_C}{dt} + u_C = 0$

以电感电流为变量： $LC \frac{d^2 i}{dt^2} + RC \frac{di}{dt} + i = 0$

以电容电压为变量时的初始条件：

$$u_C(0_+) = U_0 \quad i(0_+) = 0 \quad \rightarrow \quad \left. \frac{du_C}{dt} \right|_{t=0_+} = 0$$

以电感电流为变量时的初始条件：

$$i(0_+) = 0 \quad u_C(0_+) = U_0 \quad \rightarrow \quad \left. \frac{di}{dt} \right|_{t=0_+} = \frac{U_0}{L}$$
$$u_C(0_+) = u_L(0_+) = L \left. \frac{di}{dt} \right|_{t=0_+} = U_0 \quad \rightarrow \quad \left. \frac{di}{dt} \right|_{t=0_+} = \frac{U_0}{L}$$

电路方程：

$$LC \frac{d^2 u_C}{dt^2} + RC \frac{du_C}{dt} + u_C = 0$$

特征方程：

$$LCp^2 + RCp + 1 = 0$$

特征根：
$$p = \frac{-R \pm \sqrt{R^2 - 4L/C}}{2L} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}$$

## 2. 零状态响应的三种情况

$$R > 2\sqrt{\frac{L}{C}}$$

二个不等负实根

过阻尼

$$R = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$$

二个相等负实根

临界阻尼

$$R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$$

二个共轭复根

欠阻尼

$$(1) R > 2\sqrt{\frac{L}{C}}$$

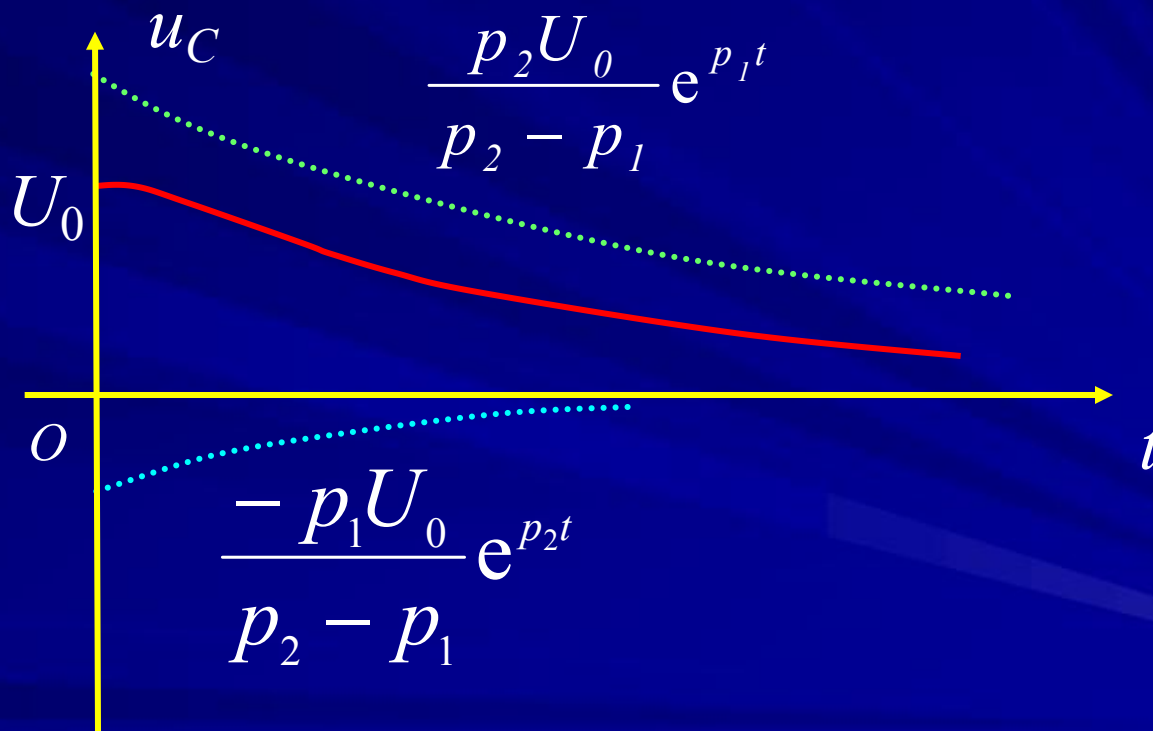
$$u_C = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}$$

$$\begin{aligned} u_C(0_+) = U_0 &\rightarrow A_1 + A_2 = U_0 \\ \left. \frac{du_C}{dt} \right|_{(0_+)} &\rightarrow p_1 A_1 + p_2 A_2 = 0 \end{aligned} \quad \begin{cases} A_1 = \frac{p_2}{p_2 - p_1} U_0 \\ A_2 = \frac{-p_1}{p_2 - p_1} U_0 \end{cases}$$

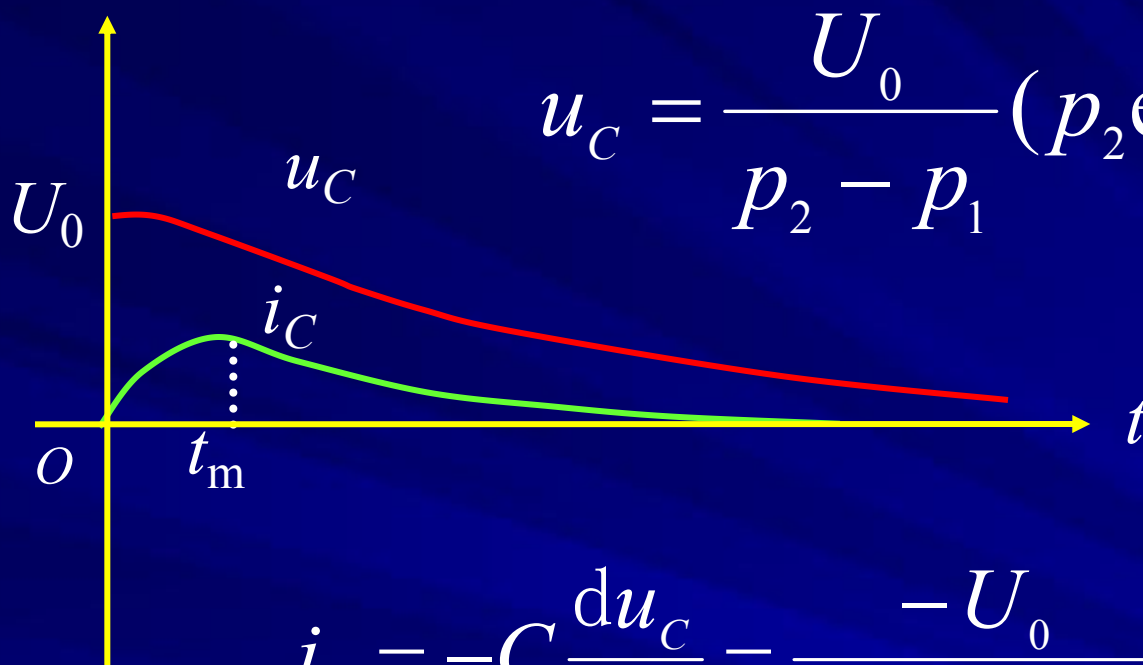
$$u_C = \frac{U_0}{p_2 - p_1} (p_2 e^{p_1 t} - p_1 e^{p_2 t})$$

## ① 电容电压

$$u_C = \frac{U_0}{p_2 - p_1} (p_2 e^{p_1 t} - p_1 e^{p_2 t})$$

设  $|p_2| > |p_1|$ 

## ②电容和电感电流



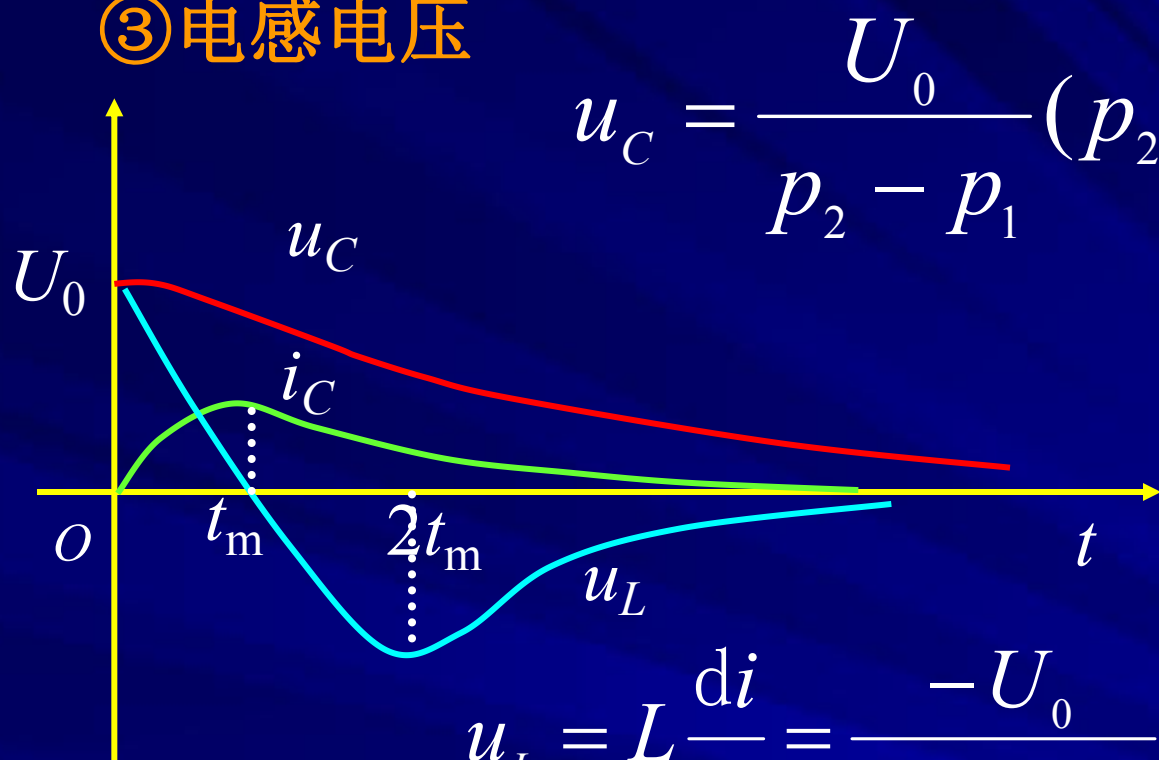
$$u_C = \frac{U_0}{p_2 - p_1} (p_2 e^{p_1 t} - p_1 e^{p_2 t})$$

$$i_C = -C \frac{du_C}{dt} = \frac{-U_0}{L(p_2 - p_1)} (e^{p_1 t} - e^{p_2 t})$$

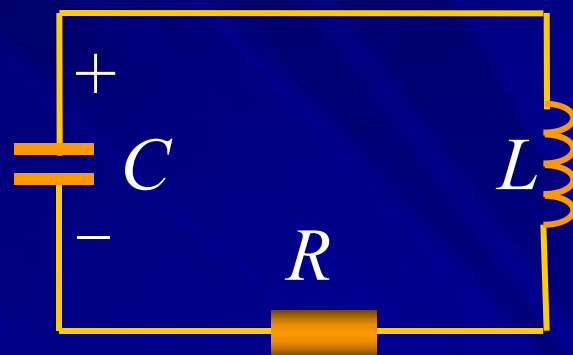
$$t=0_+ \quad i_C=0, \quad t=\infty \quad i_C=0$$

$$i_C > 0 \quad t = t_m \text{ 时 } i_C \text{ 最大}$$

## ③电感电压



$$u_C = \frac{U_0}{p_2 - p_1} (p_2 e^{p_1 t} - p_1 e^{p_2 t})$$



$$u_L = L \frac{di}{dt} = \frac{-U_0}{(p_2 - p_1)} (p_1 e^{p_1 t} - p_2 e^{p_2 t})$$

$$t = 0, u_L = U_0 \quad t = \infty, u_L = 0$$

$$0 < t < t_m, i \text{ 增加}, u_L > 0, \quad t > t_m, i \text{ 减小}, u_L < 0$$

$$t = 2 t_m \text{ 时 } |u_L| \text{ 最大}$$

$$u_L = L \frac{di}{dt} = \frac{-U_0}{(p_2 - p_1)} (p_1 e^{p_1 t} - p_2 e^{p_2 t})$$

$i_C=i$  为极值时，即  $u_L=0$  时的  $t_m$  计算如下：

$$(p_1 e^{p_1 t} - p_2 e^{p_2 t}) = 0 \quad \frac{p_2}{p_1} = \frac{e^{p_1 t_m}}{e^{p_2 t_m}}$$

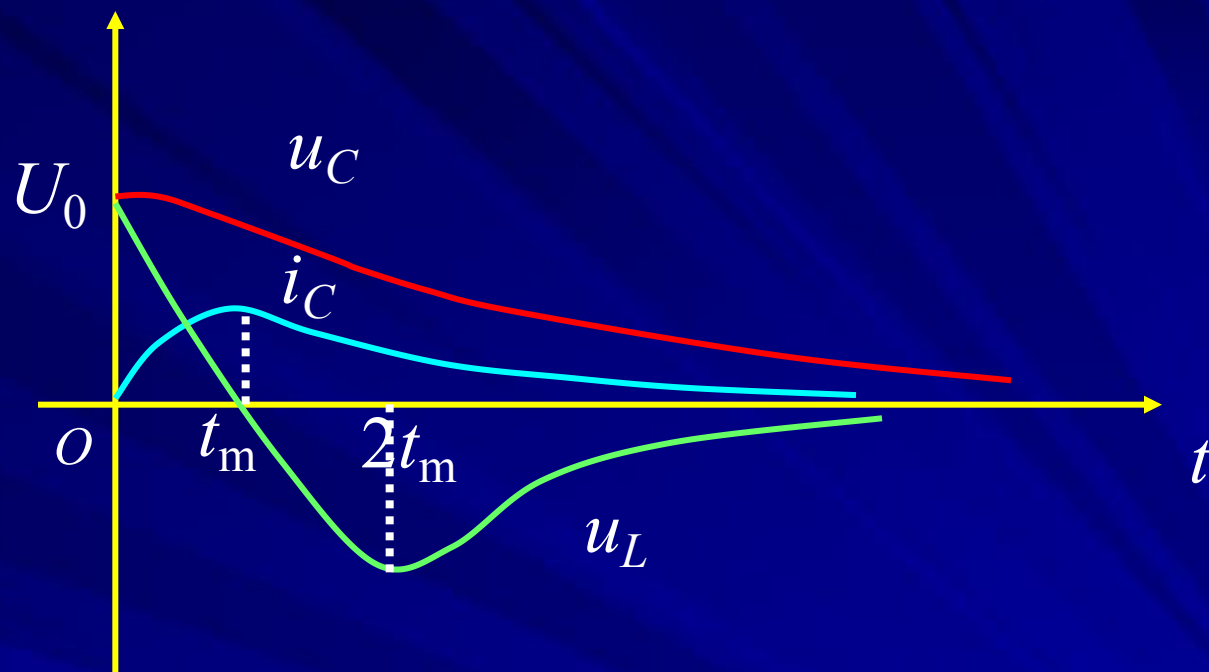
$$t_m = \frac{\ln(\frac{p_2}{p_1})}{p_1 - p_2}$$

由  $du_L/dt$  可确定  $u_L$  为极小时的  $t$ 。

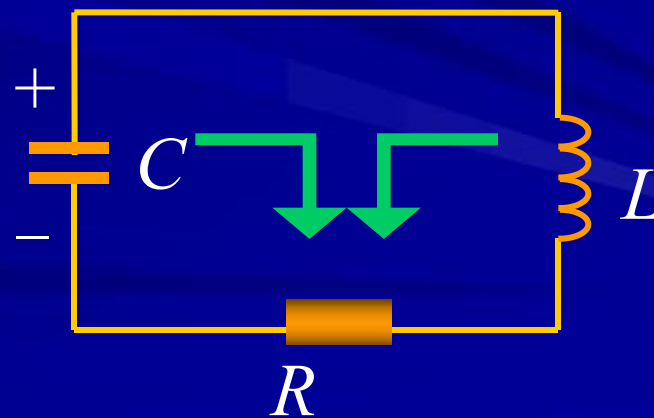
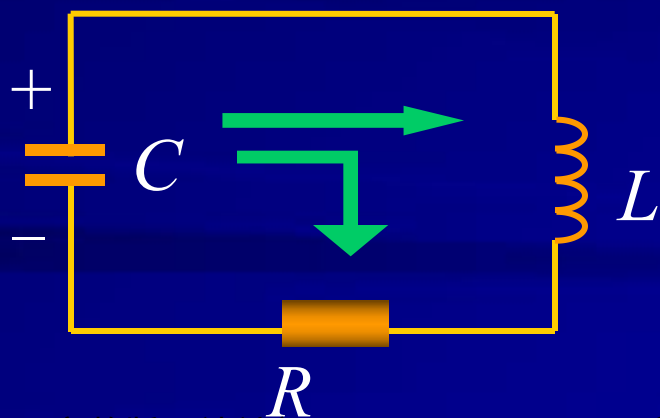
$$(p_1^2 e^{p_1 t} - p_2^2 e^{p_2 t}) = 0$$

$$\rightarrow t = 2t_m \quad t = \frac{2\ln(\frac{p_2}{p_1})}{p_1 - p_2}$$

## ④能量转换关系



$0 < t < t_m$   $u_C$  减小,  $i$  增加。  $t > t_m$   $u_C$  减小,  $i$  减小。



$$(2) R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$$

$$p_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}$$

共轭复根

$$\text{令: } \delta = \frac{R}{2L} \text{ (衰减系数), } \omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}} \text{ (谐振角频率)}$$

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} \text{ (固有振荡角频率)} \quad p = -\delta \pm j\omega$$

 $u_C$  的解答形式:

$$u_C = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t} = e^{-\delta t} (A_1 e^{j\omega t} + A_2 e^{-j\omega t})$$

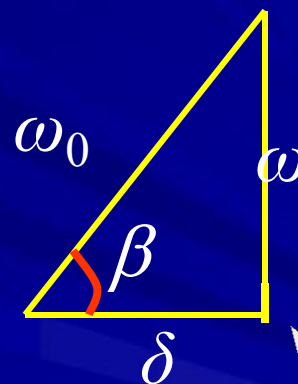
经常写为:

$$u_C = A e^{-\delta t} \sin(\omega t + \beta)$$

$$u_c = \frac{\omega_0}{\omega} U_0 e^{-\delta t} \sin(\omega t + \beta)$$

由初始条件  $\begin{cases} u_c(0^+) = U_0 \rightarrow A \sin \beta = U_0 \\ \frac{du_c}{dt}(0^+) = 0 \rightarrow A(-\delta) \sin \beta + A \omega \cos \beta = 0 \end{cases}$

$$A = \frac{U_0}{\sin \beta}, \quad \beta = \arctan\left(\frac{\omega}{\delta}\right)$$



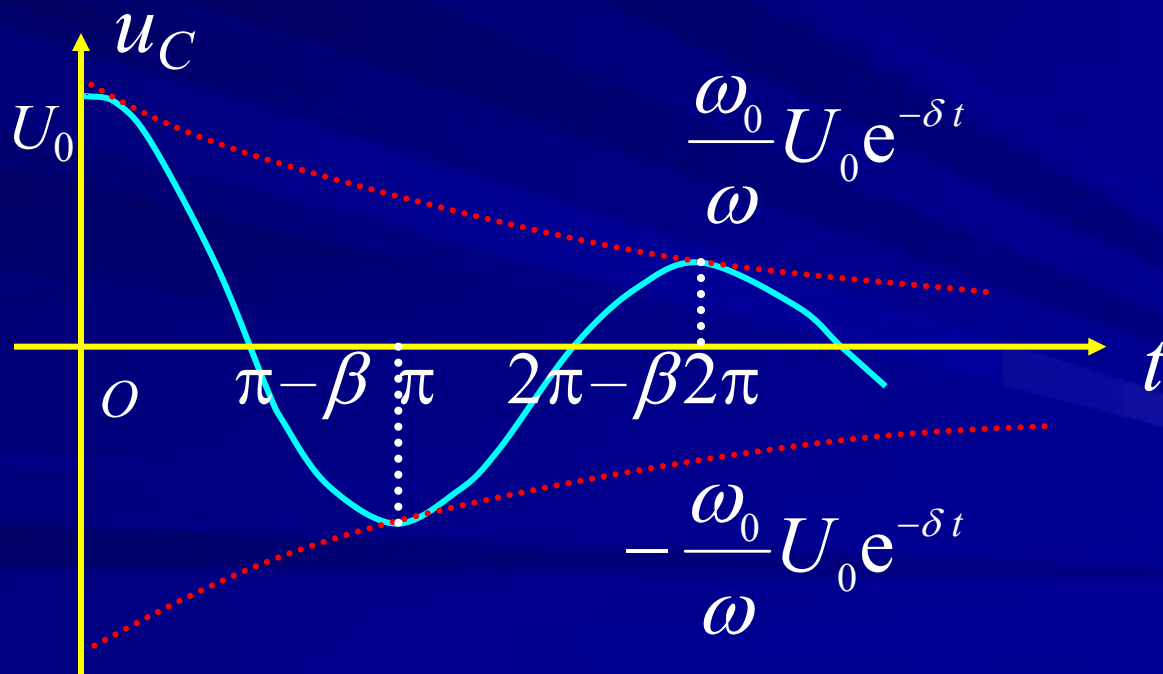
$\omega, \omega_0, \delta$  的关系

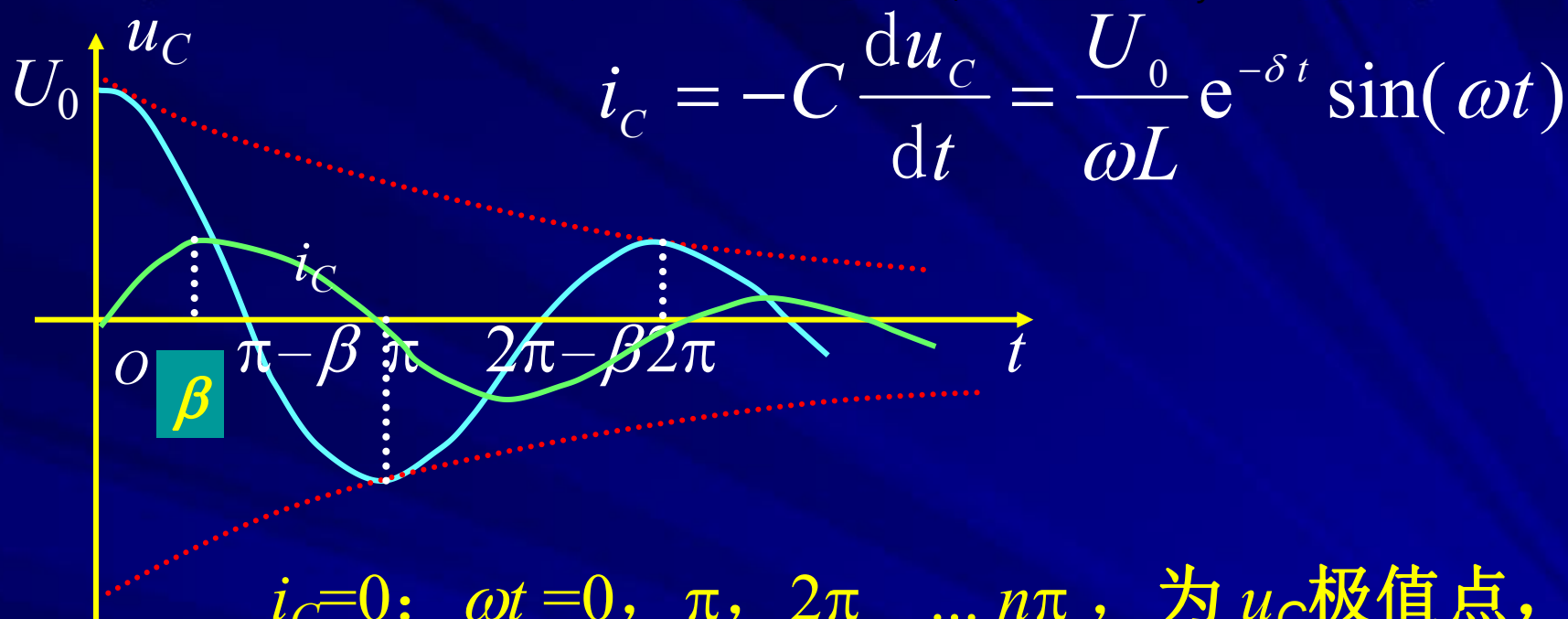
$$\sin \beta = \frac{\omega}{\omega_0} \quad A = \frac{\omega_0}{\omega} U_0$$

$$u_C = \frac{\omega_0}{\omega} U_0 e^{-\delta t} \sin(\omega t + \beta)$$

$u_C$  是振幅以  $\pm \frac{\omega_0}{\omega} U_0$  为包络线依指数衰减的正弦函数。

$t=0$  时  $u_C=U_0$        $u_C=0$ :  $\omega t = \pi - \beta, 2\pi - \beta \dots n\pi - \beta$

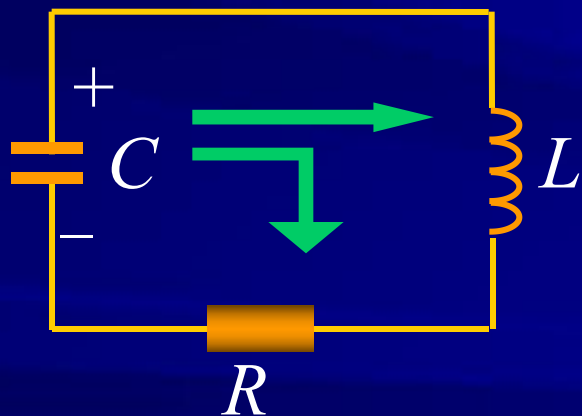
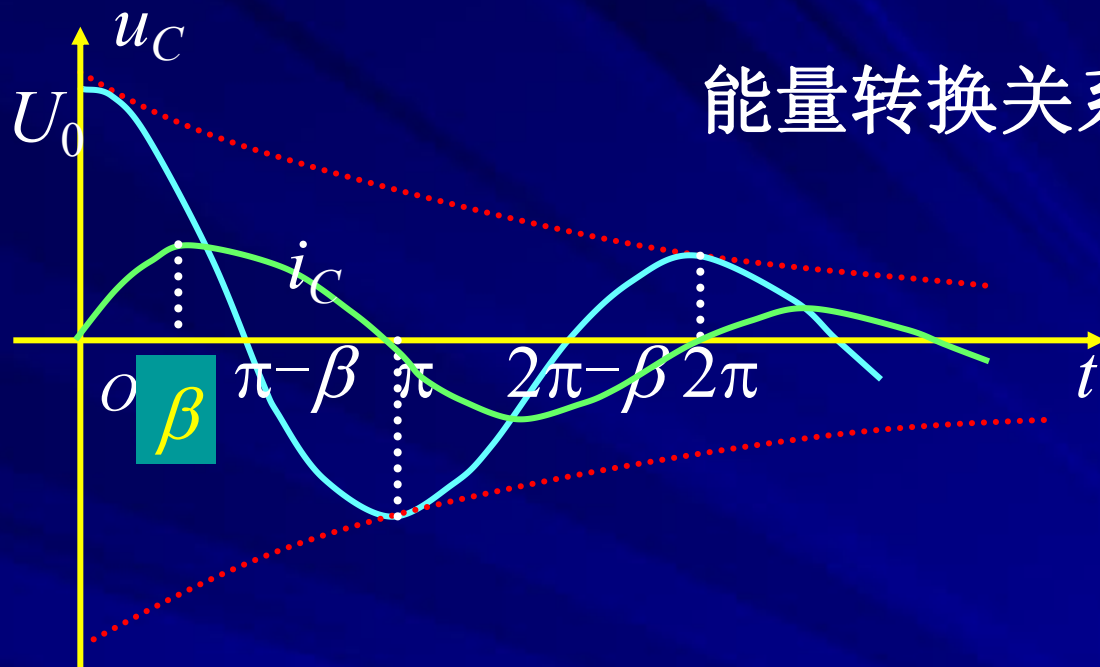




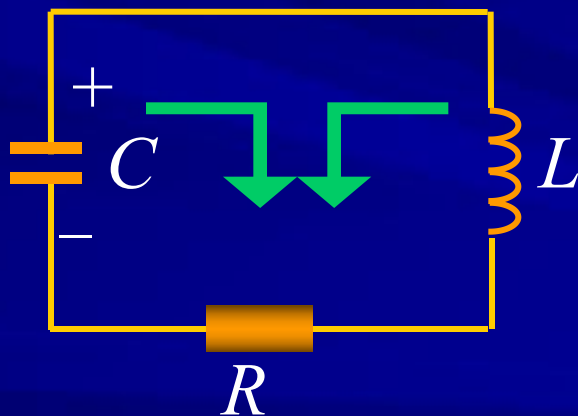
$i_C=0$ :  $\omega t=0, \pi, 2\pi \dots n\pi$ , 为  $u_C$  极值点,  
 $i_C$  的极值点为  $u_L$  零点。

$$u_L = L \frac{di}{dt} = -\frac{\omega_0}{\omega} U_0 e^{-\delta t} \sin(\omega t - \beta)$$

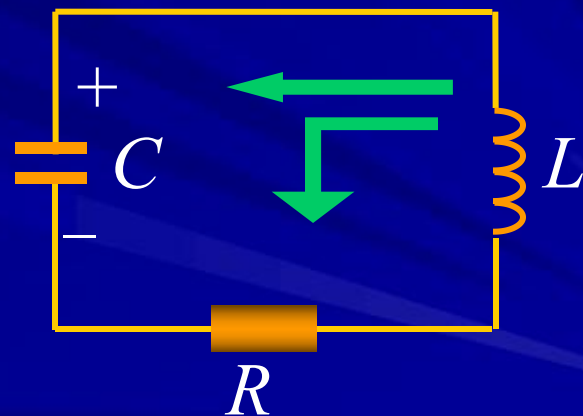
$$u_L=0: \omega t = \beta, \pi+\beta, 2\pi+\beta \dots n\pi+\beta$$



$$0 < \omega t < \beta$$



$$\beta < \omega t < \pi - \beta$$



$$\pi - \beta < \omega t < \pi$$

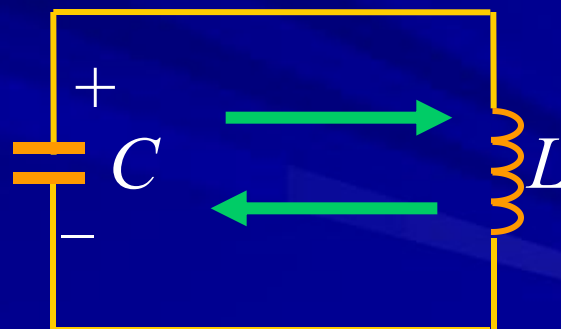
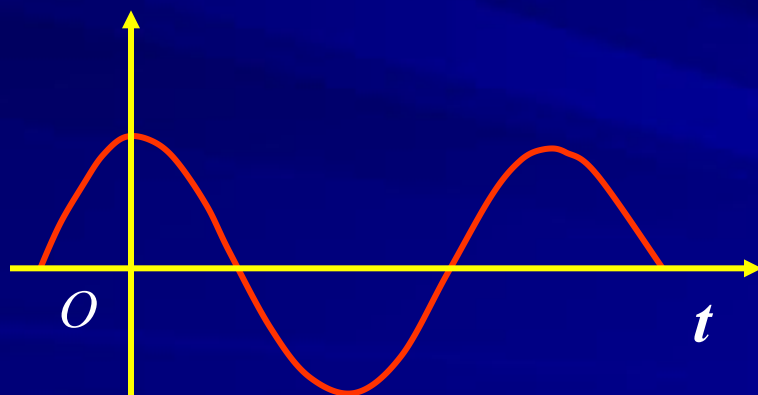
特例：  $R=0$  时

$$\delta = 0, \quad \omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad \beta = \frac{\pi}{2}$$

$$u_C = U_0 \sin(\omega t + 90^\circ) = u_L$$

$$i = \frac{U_0}{\omega L} \sin(\omega t)$$

→ 等幅振荡



$$(3) R = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$$

$$p_1 = p_2 = -\frac{R}{2L} = -\delta$$

相等负实根

$$u_C = A_1 e^{-\delta t} + A_2 t e^{-\delta t}$$

由初始条件

$$\begin{cases} u_C(0^+) = U_0 \rightarrow A_1 = U_0 \\ \frac{du_C}{dt}(0^+) = 0 \rightarrow A_1(-\delta) + A_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A_1 = U_0 \\ A_2 = U_0 \delta \end{cases}$$

$$u_C = A_1 e^{-\delta t} + A_2 t e^{-\delta t}$$

$$A_1 = U_0 \quad A_2 = U_0 \delta$$

$$u_C = U_0 e^{-\delta t} (1 + \delta t)$$

$$i_C = -C \frac{du_C}{dt} = \frac{U_0}{L} t e^{-\delta t}$$

$$u_L = L \frac{di}{dt} = U_0 e^{-\delta t} (1 - \delta t)$$

非振荡放电



小结

 $R > 2\sqrt{\frac{L}{C}}$  过阻尼，非振荡放电

$$u_C = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}$$

 $R = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$  临界阻尼，非振荡放电

$$u_C = A_1 e^{-\delta t} + A_2 t e^{-\delta t}$$

 $R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$  欠阻尼，振荡放电

$$u_C = A e^{-\delta t} \sin(\omega t + \beta)$$

由初始条件  $\begin{cases} u_C(0_+) \\ \frac{du_C}{dt}(0_+) \end{cases}$  定常数

可推广应用于一般二阶电路

例5-1 电路如图， $t=0$  时打开开关。求  $u_C$  并画出其变化曲线。

解

$$(1) \quad u_C(0_-) = 25\text{V}$$

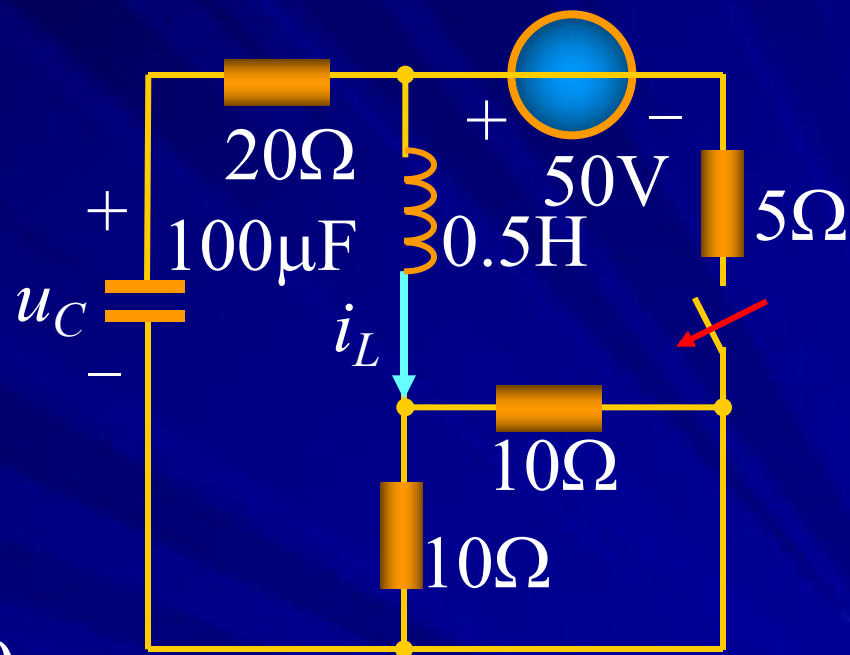
$$i_L(0_-) = 5\text{A}$$

(2) 开关打开为  $RLC$  串联电路，方程为

$$LC \frac{d^2 u_C}{dt^2} + RC \frac{du_C}{dt} + u_C = 0$$

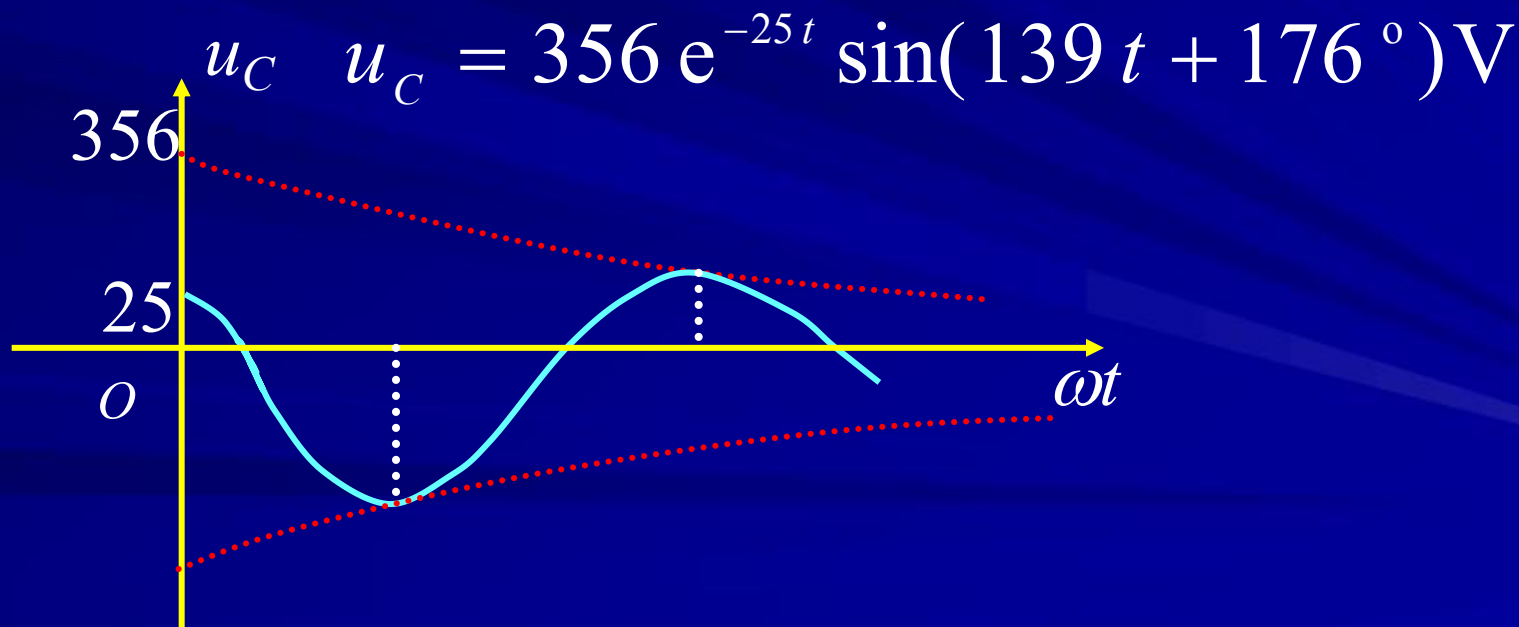
$$\text{特征方程为 } 50p^2 + 2500p + 10^6 = 0$$

$$p = -25 \pm j139 \quad u_C = Ae^{-25t} \sin(139t + \beta)$$



$$u_C = A e^{-25t} \sin(139t + \beta)$$

$$(3) \begin{cases} u_C(0_+) = 25 \\ C \frac{du_C}{dt} \Big|_{0_+} = -5 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} A \sin \beta = 25 \\ A(139 \cos \beta - 25 \sin \beta) = \frac{-5}{10^{-4}} \end{cases}$$
$$A = 356, \quad \beta = 176^\circ$$



## 7-6 二阶电路的零状态响应和全响应

### 1. 二阶电路的零状态响应

$$u_C(0_-)=0, \quad i_L(0_-)=0$$

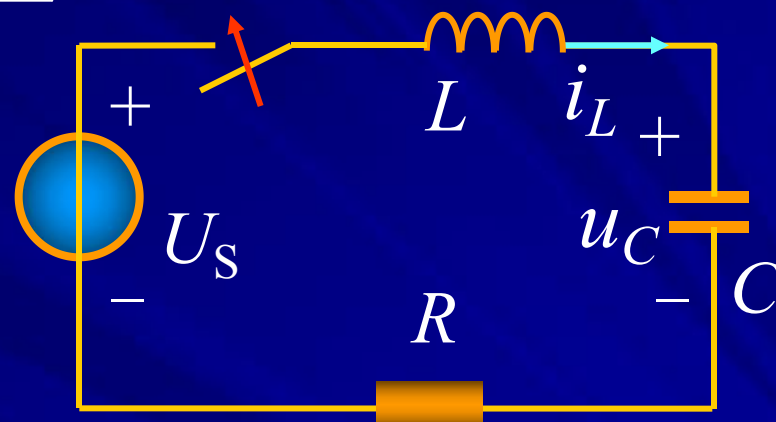
微分方程为

$$LC \frac{d^2 u_C}{dt^2} + RC \frac{du_C}{dt} + u_C = U_s$$

$$u_C = u'_C + u''_C$$

特解

通解



特征方程为

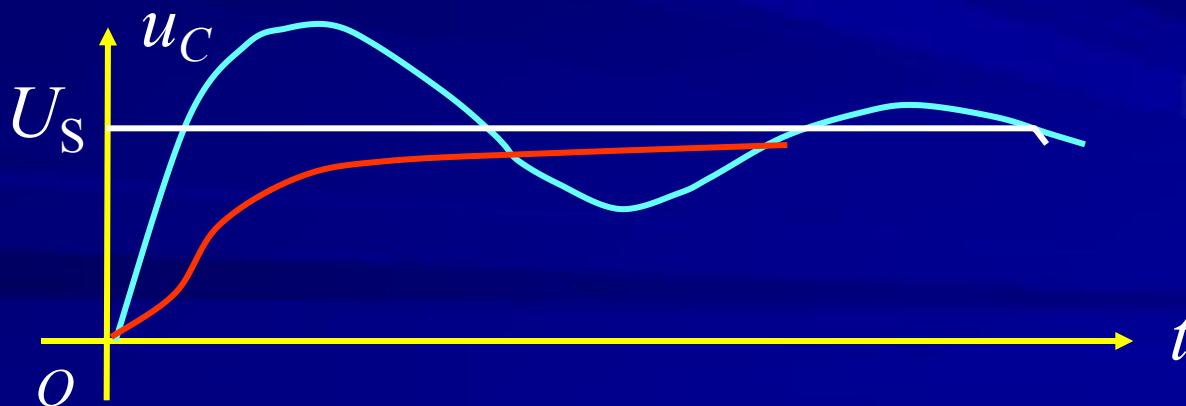
$$LCp^2 + RCp + 1 = 0$$

特解：  $u'_C = U_s$

$u_C$  解答形式为

$$\begin{cases} u_C = U_s + A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t} & (p_1 \neq p_2) \\ u_C = U_s + A_1 e^{-\delta t} + A_2 t e^{-\delta t} & (p_1 = p_2 = -\delta) \\ u_C = U_s + A e^{-\delta t} \sin(\omega t + \beta) & (p_{1,2} = -\delta \pm j\omega) \end{cases}$$

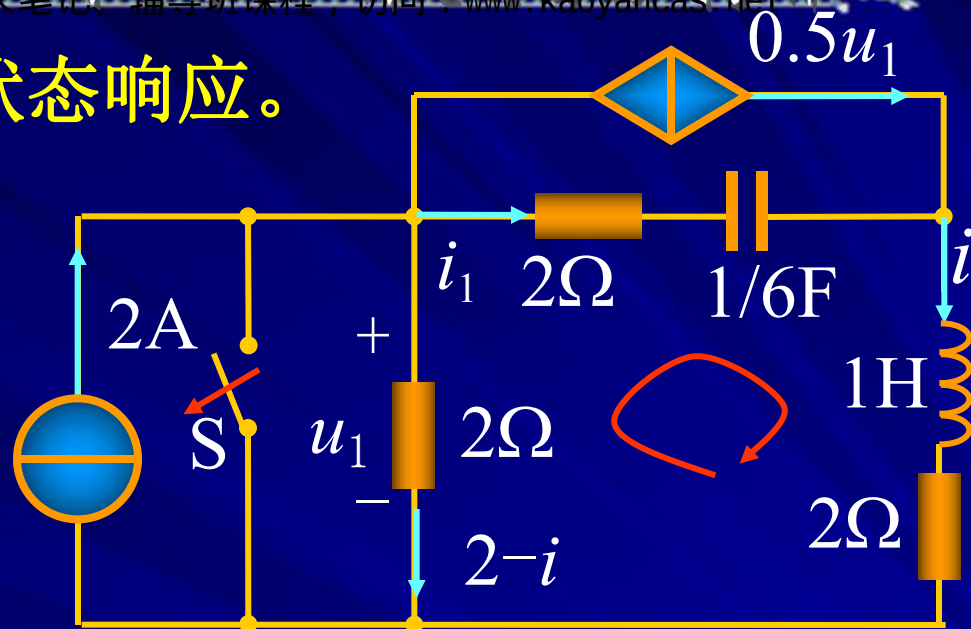
由初值  $u_C(0_+)$ ,  $\frac{du(0_+)}{dt}$  确定两个常数



### 例6-1 求电流 $i$ 的零状态响应。

**解** 首先写微分方程。

$$\begin{aligned} i_1 &= i - 0.5 u_1 \\ &= i - 0.5(2 - i) \times 2 \\ &= 2i - 2 \end{aligned}$$



由KVL得  $2(2 - i) = 2i_1 + 6 \int i_1 dt + \frac{di}{dt} + 2i$

整理得  $\frac{d^2 i}{dt^2} + 8 \frac{di}{dt} + 12i = 12$

二阶非齐次  
常微分方程

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + 8 \frac{di}{dt} + 12i = 12$$

解答形式为  $i = i' + i''$

第二步求通解  $i''$ 。

特征根为  $p_1 = -2$  ,  $p_2 = -6$

稳态模型

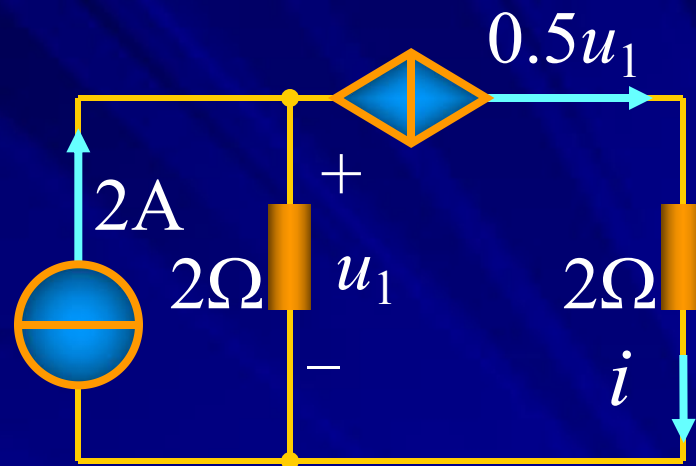
$$i'' = A_1 e^{-2t} + A_2 e^{-6t}$$

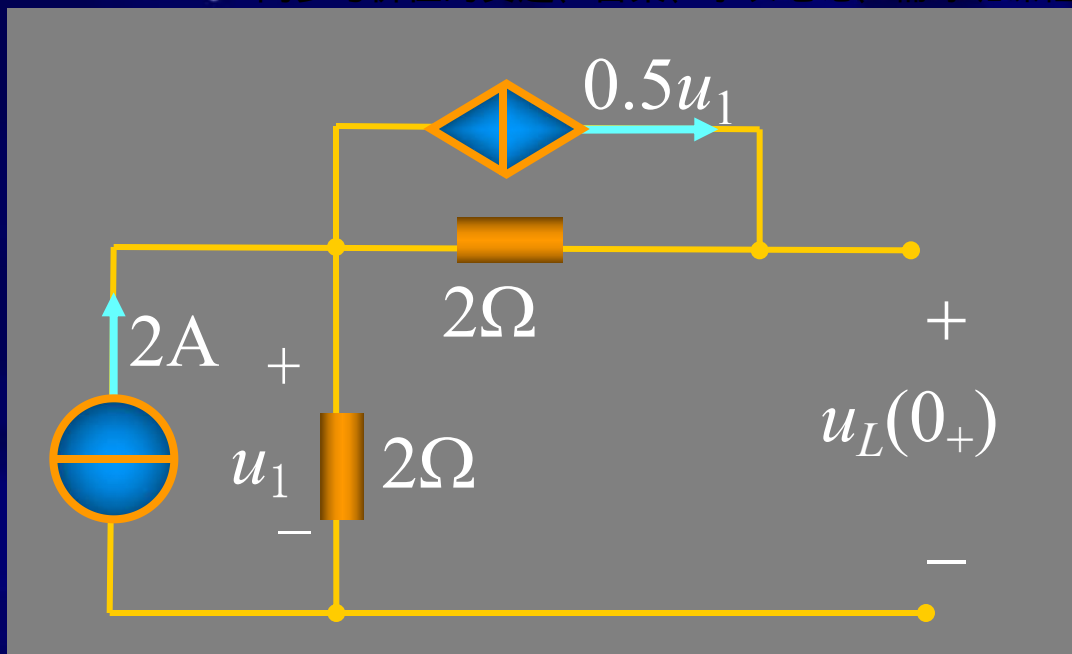
第三步求特解  $i'$ 。

由稳态模型有  $i' = 0.5 u_1$        $u_1 = 2(2 - 0.5u_1)$



$$u_1 = 2V \quad i' = 1A$$





## 第四步定常数

$$i = 1 + A_1 e^{-2t} + A_2 e^{-6t}$$

$$\begin{cases} i(0_+) = i(0_-) = 0 \\ L \frac{di}{dt}(0_+) = u_L(0_+) \end{cases}$$

由 $0_+$ 电路模型得  $u_L(0_+) = 0.5u_1 \times 2 + u_1 = 2u_1 = 8V$

$$\begin{cases} 0 = 1 + A_1 + A_2 \\ 8 = -2A_1 - 6A_2 \end{cases} \quad \begin{cases} A_1 = 0.5 \\ A_2 = -1.5 \end{cases}$$

$$\longrightarrow i = (1 + 0.5e^{-2t} - 1.5e^{-6t}) \text{ A}$$

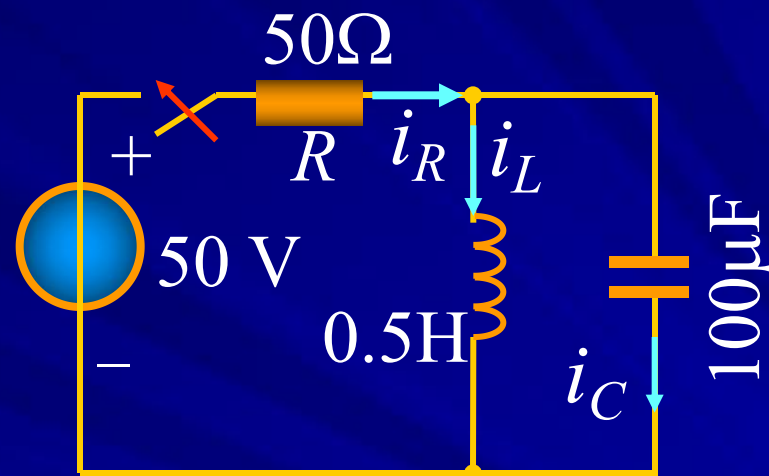
## 2. 二阶电路的全响应

例6-2 已知：  $i_L(0_-)=2\text{A}$   $u_C(0_-)=0$  求：  $i_L$ ,  $i_R$ 。

**解** (1) 列微分方程  
应用结点法：

$$\frac{L \frac{di_L}{dt} - 50}{R} + i_L + LC \frac{d^2 i_L}{dt^2} = 0$$

$$RLC \frac{d^2 i_L}{dt^2} + L \frac{di_L}{dt} + Ri_L = 50$$



(2) 求特解

$$i'_L = 1\text{A}$$

$$RLC \frac{d^2 i_L}{dt^2} + L \frac{di}{dt} + Ri_L = 50$$

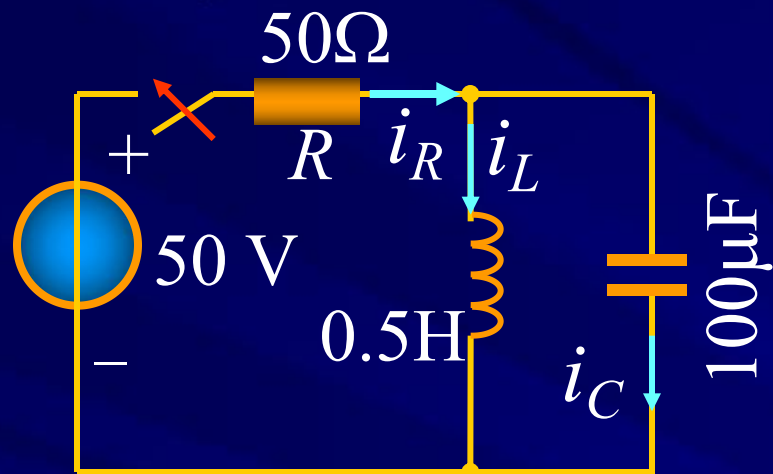
(3) 求通解 特征方程为  $p^2 + 200p + 20000 = 0$

特征根为  $p = -100 \pm j100$

$$\rightarrow i = 1 + Ae^{-100t} \sin(100t + \varphi)$$

(4) 定常数 
$$\begin{cases} 1 + A \sin \varphi = 2 & \leftarrow i_L(0_+) \\ 100A \cos \varphi - 100A \sin \varphi = 0 & \leftarrow u_L(0_+) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \varphi = 45^\circ \\ A = \sqrt{2} \end{cases} \rightarrow i_L = 1 + \sqrt{2}e^{-100t} \sin(100t + 45^\circ)$$



(5) 求  $i_R$

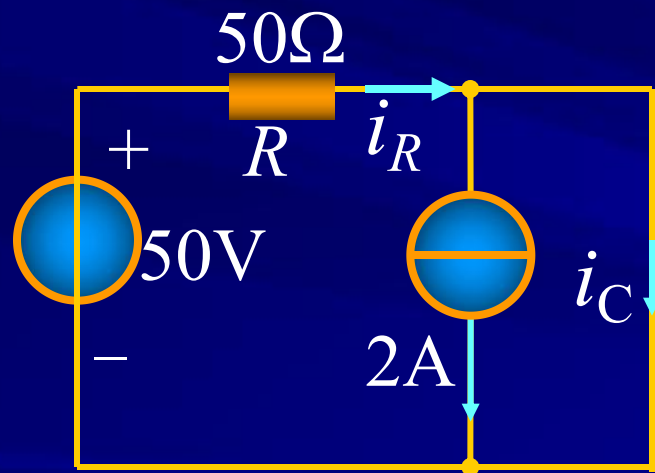
$$i_R = i_L + i_C = i_L + LC \frac{d^2 i_L}{dt^2}$$

或设解答形式为

$$i_R = 1 + Ae^{-100t} \sin(100t + \varphi)$$

定常数

$$\begin{cases} i_R(0_+) = 1 & i_C(0_+) = -1 \\ \frac{di_R}{dt}(0_+) = ? & i_R = \frac{50 - u_C}{R} \end{cases}$$



$$\frac{di_R}{dt}(0_+) = -\frac{1}{R} \frac{du_C}{dt}(0_+) = -\frac{1}{RC} i_C(0_+) = 200$$

$$i_R = 1 + Ae^{-100t} \sin(100t + \varphi)$$

$$\begin{cases} 1 + A \sin \varphi = 1 \\ 100A \cos \varphi - 100A \sin \varphi = 200 \end{cases} \quad \begin{cases} \varphi = 0 \\ A = 2 \end{cases}$$



## 小结

1. 二阶电路含二个独立储能元件，是用二阶常微分方程所描述的电路。
2. 二阶电路的性质取决于特征根，特征根取决于电路结构和参数，与激励和初值无关。

$$p = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}$$

$\delta > \omega_0$  过阻尼， 非振荡放电

$$u_C = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}$$

$\delta = \omega_0$  临界阻尼， 非振荡放电

$$u_C = A_1 e^{-\delta t} + A_2 t e^{-\delta t}$$

$\delta < \omega_0$  欠阻尼， 振荡放电

$$u_C = A e^{-\delta t} \sin(\omega t + \beta)$$

### 3. 求二阶电路全响应的步骤

①列写 $t > 0_+$ 电路的微分方程。

②求通解。

③求特解。

④全响应=强制分量+自由分量。

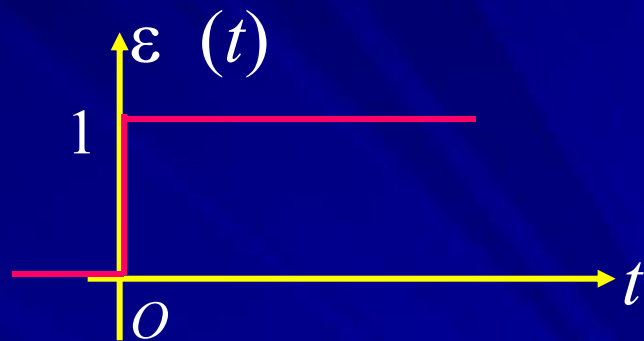
⑤由初始值  $\left. \begin{matrix} f(0_+) \\ \frac{df}{dt}(0_+) \end{matrix} \right\}$  定常数。

# 7-7 一阶电路和二阶电路的阶跃响应

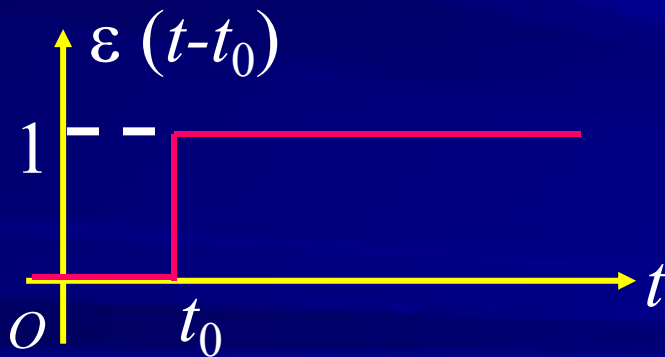
## 1. 单位阶跃函数

### ● 定义

$$\varepsilon(t) = \begin{cases} 0 & (t < 0) \\ 1 & (t > 0) \end{cases}$$



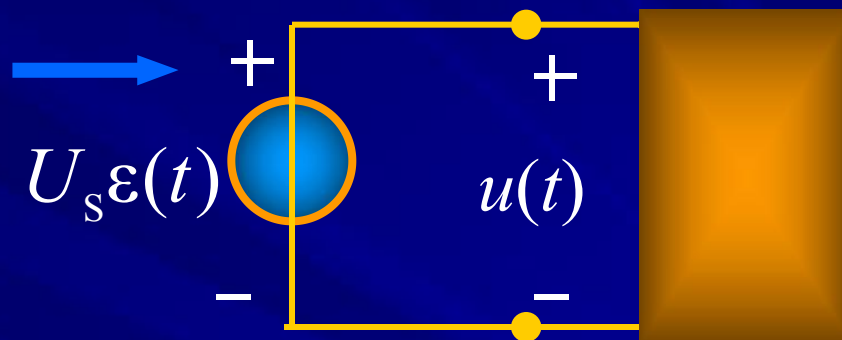
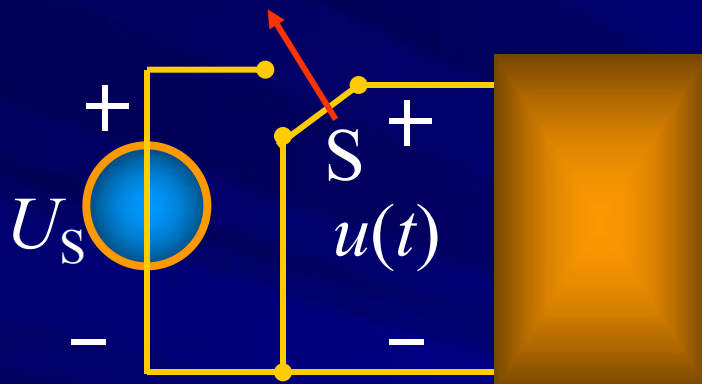
### ● 单位阶跃函数的延迟



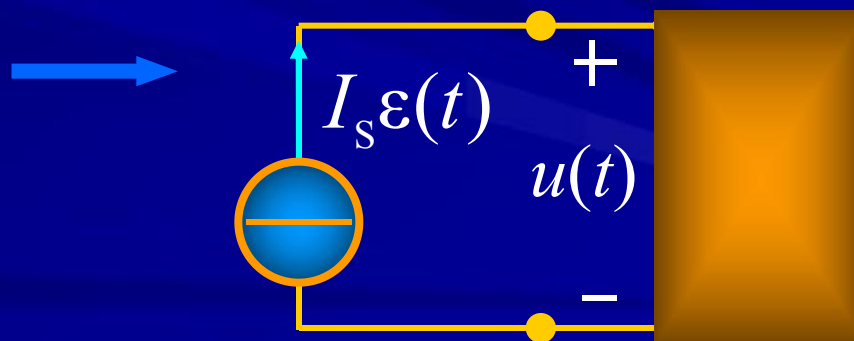
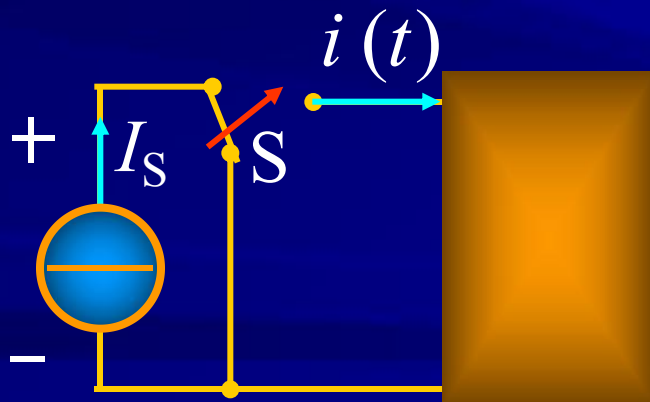
$$\varepsilon(t - t_0) = \begin{cases} 0 & (t < t_0) \\ 1 & (t > t_0) \end{cases}$$

## ● 单位阶跃函数的作用

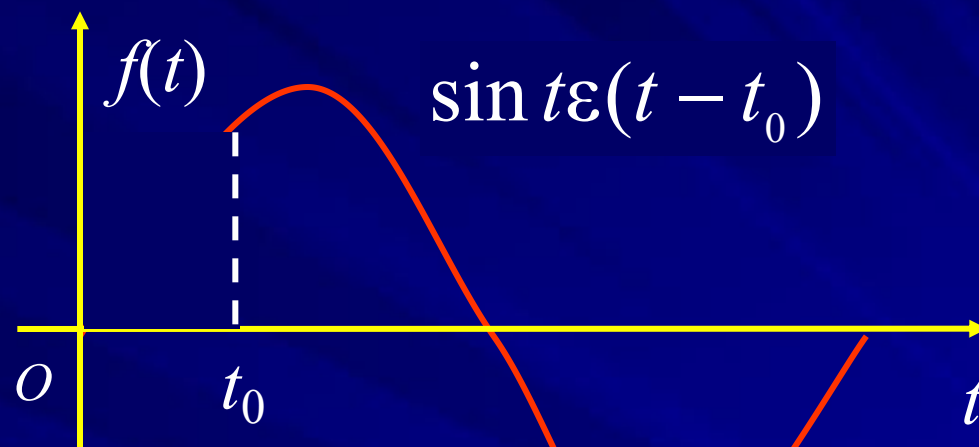
①在电路中模拟开关的动作。 $t = 0$  合闸  $u(t) = U_S \varepsilon(t)$



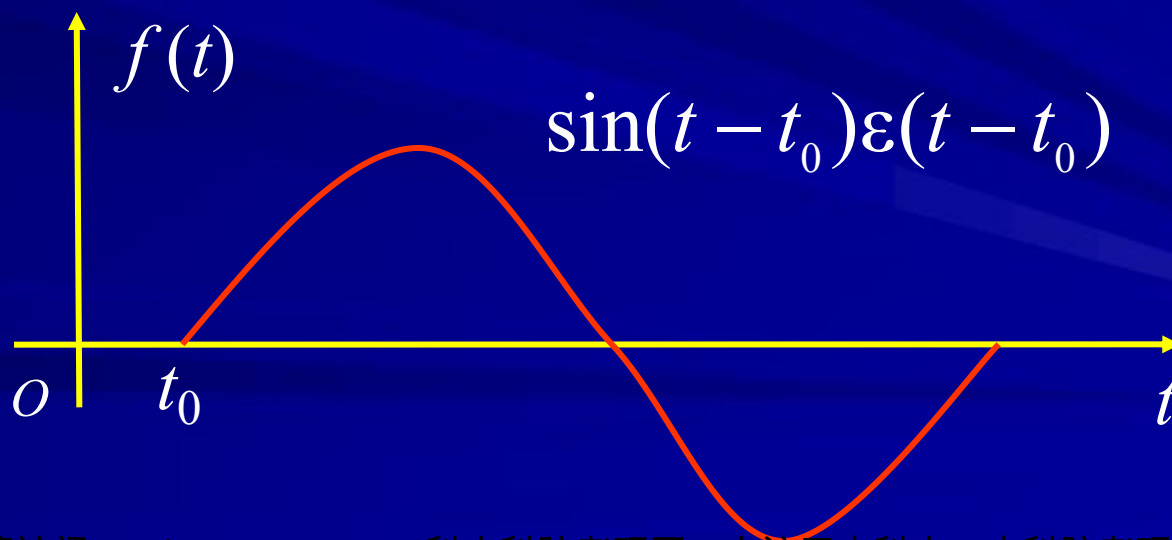
$t = 0$  合闸  $i(t) = I_S \varepsilon(t)$



## ②起始一个函数

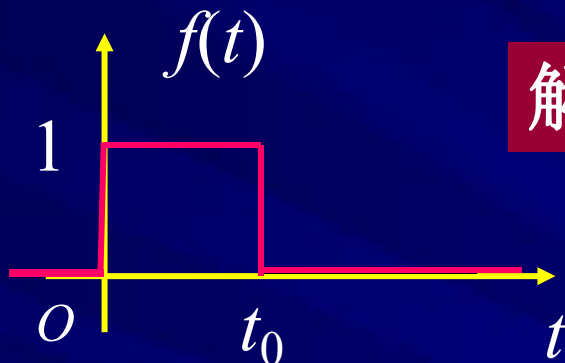


## ③延迟一个函数

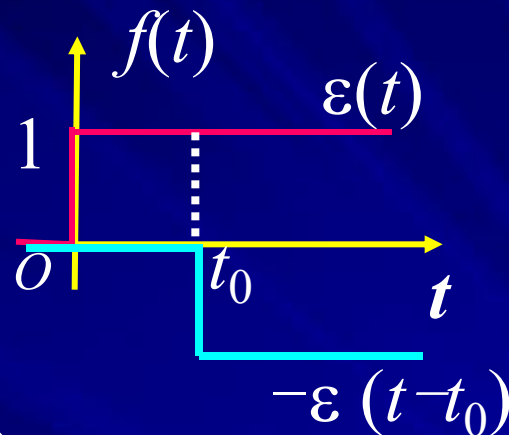


## ● 用单位阶跃函数表示复杂的信号

例7-1



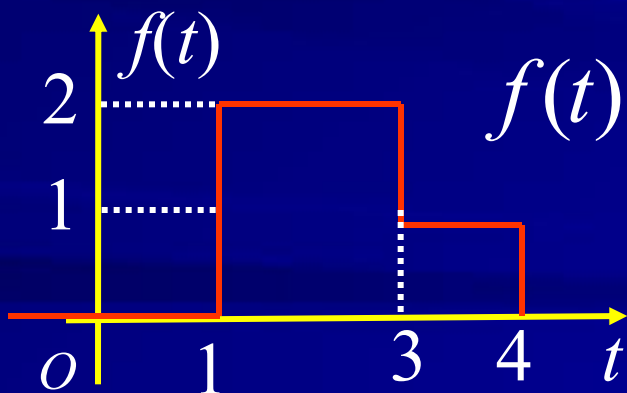
解



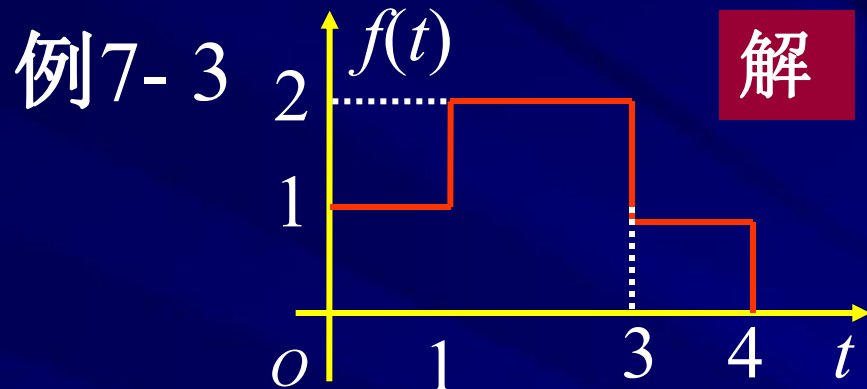
$$f(t) = \varepsilon(t) - \varepsilon(t - t_0)$$

例7-2

解



$$f(t) = 2\varepsilon(t - 1) - \varepsilon(t - 3) - \varepsilon(t - 4)$$



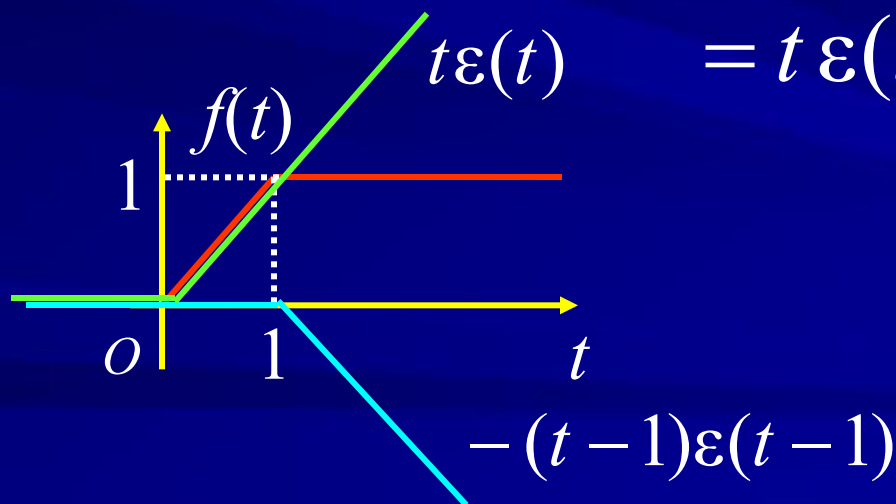
解

$$f(t) = \varepsilon(t) + \varepsilon(t-1) - \varepsilon(t-3) - \varepsilon(t-4)$$

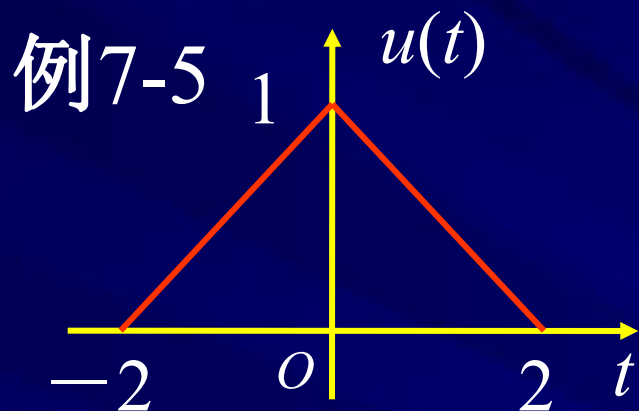
例7-4

解

$$f(t) = t[\varepsilon(t) - \varepsilon(t-1)] + \varepsilon(t-1)$$

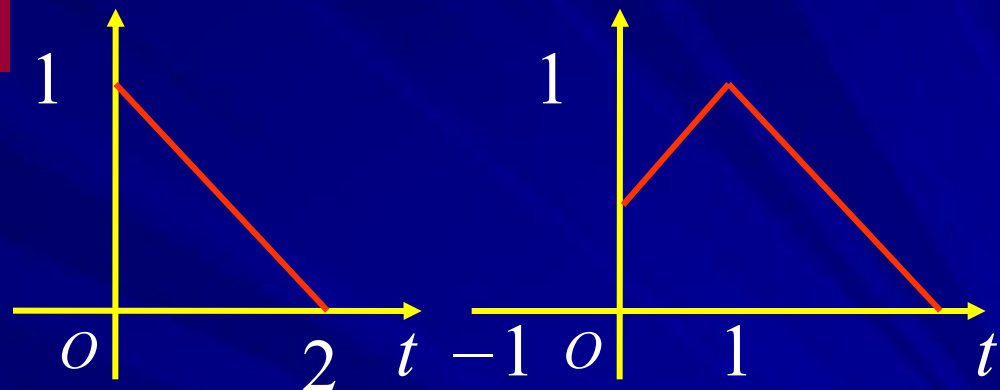


$$= t \varepsilon(t) - (t-1) \varepsilon(t-1)$$



已知电压  $u(t)$  的波形如图，  
试画出下列电压的波形。

解

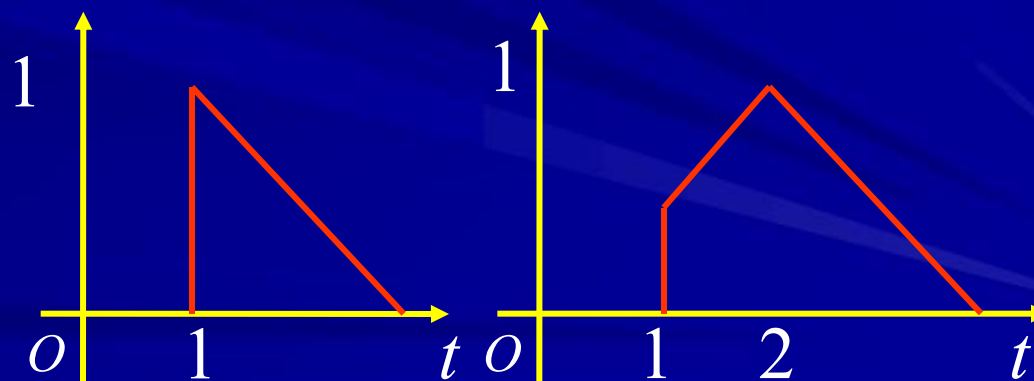


(1)  $u(t)\varepsilon(t)$

(2)  $u(t-1)\varepsilon(t)$

(3)  $u(t-1)\varepsilon(t-1)$

(4)  $u(t-2)\varepsilon(t-1)$



## 2. 一阶电路的阶跃响应

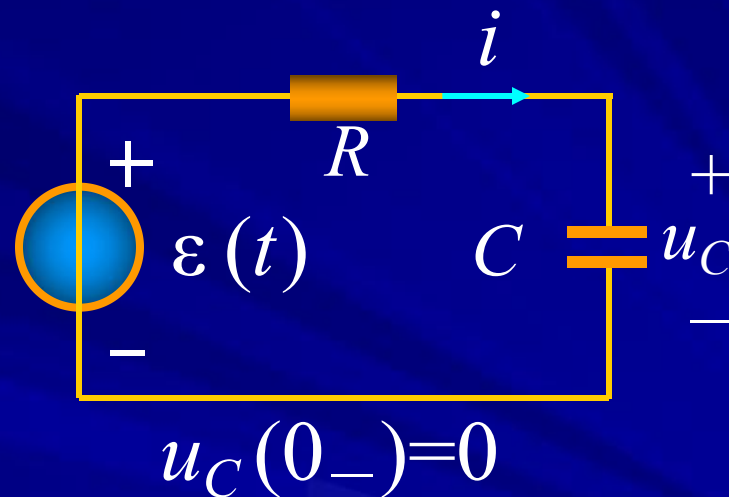
阶跃响应



激励为单位阶跃函数时，电路中产生的零状态响应。

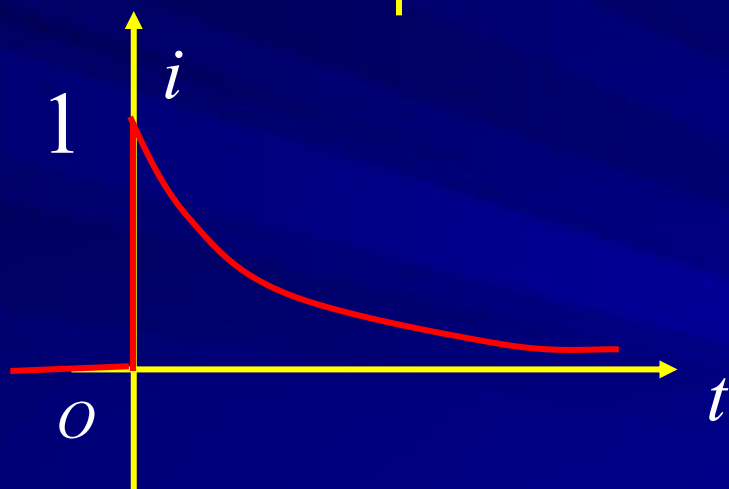
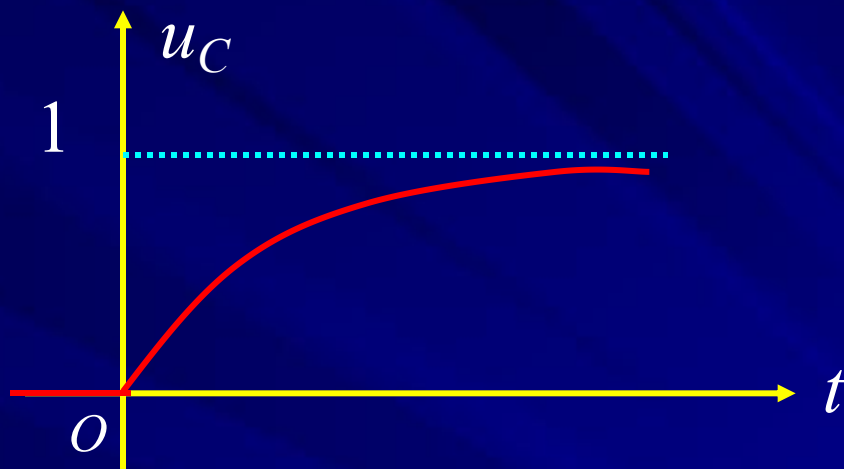
$$u_C(t) = (1 - e^{-\frac{t}{RC}}) \varepsilon(t)$$

$$i(t) = \frac{1}{R} e^{-\frac{t}{RC}} \varepsilon(t)$$

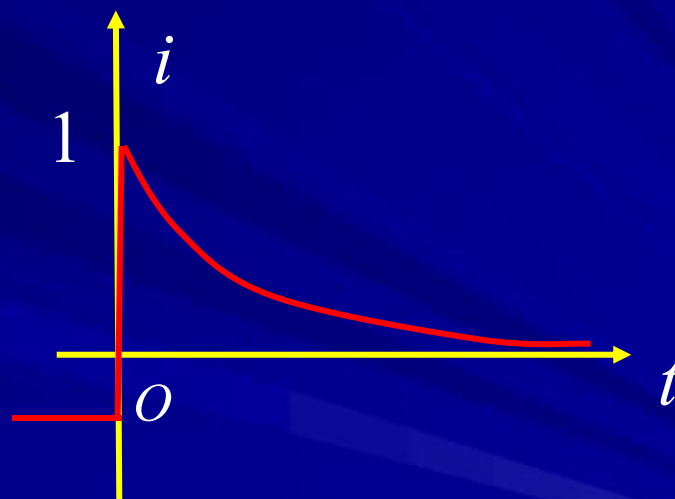


注意

$i = e^{-\frac{t}{RC}} \varepsilon(t)$  和  $i = e^{-\frac{t}{RC}} \quad t > 0$  的区别。



$$i = e^{-\frac{t}{RC}} \varepsilon(t)$$



$$i = e^{-\frac{t}{RC}} \quad t > 0$$

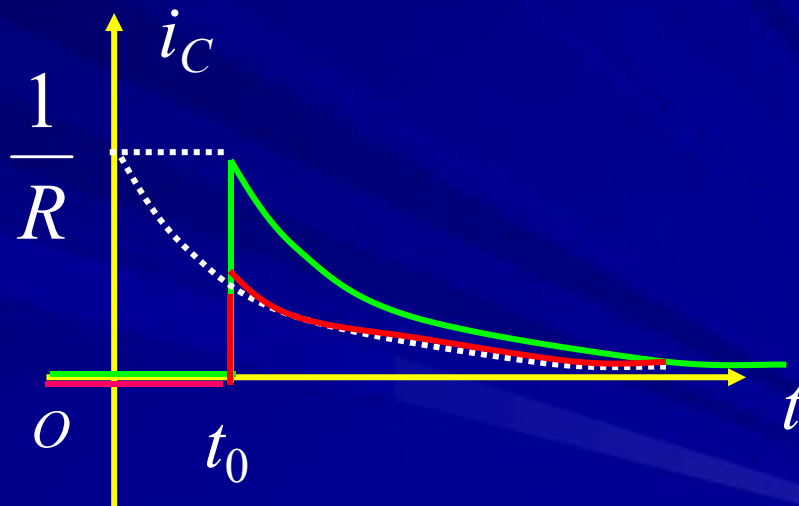
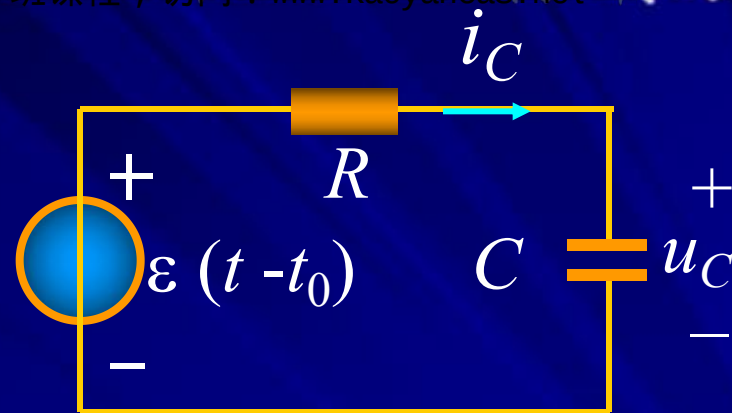
激励在  $t = t_0$  时加入，  
则响应从  $t = t_0$  开始。

$$i_C = \frac{1}{R} e^{-\frac{t-t_0}{RC}} \varepsilon(t-t_0)$$

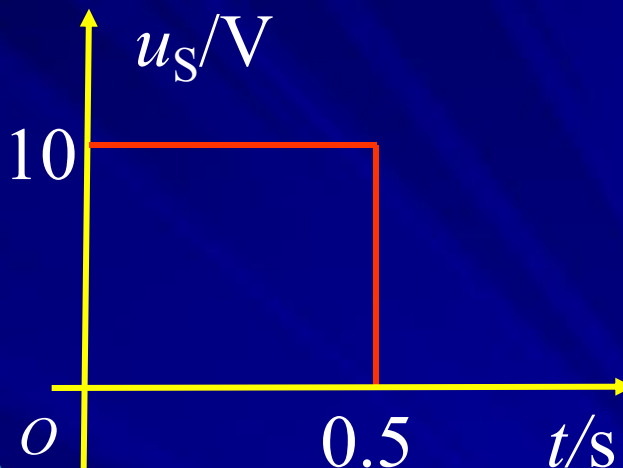
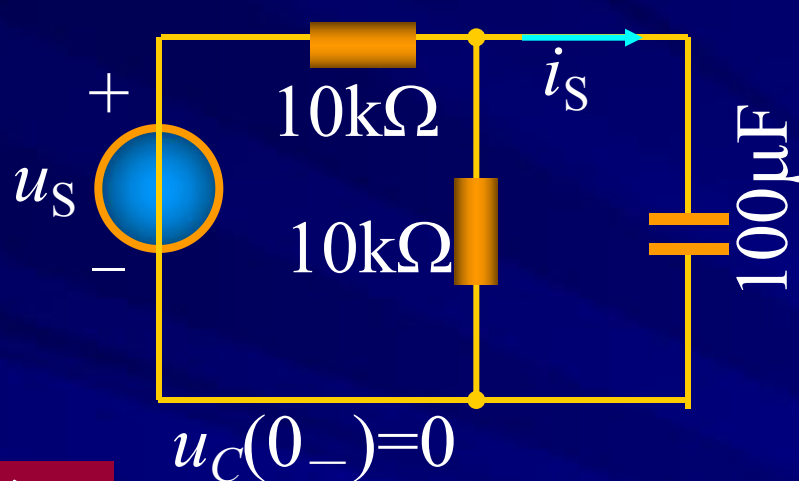


**注意** 不要写为

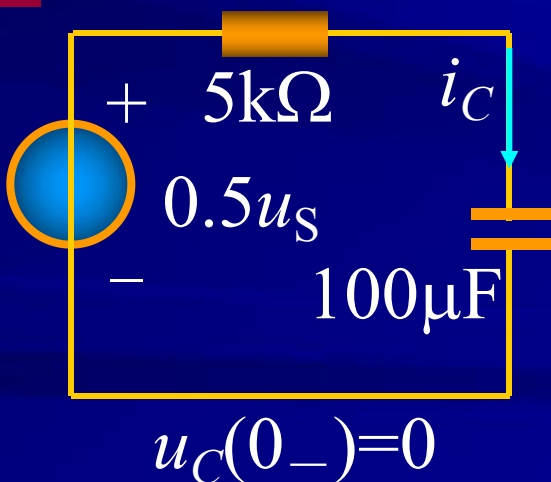
$$\frac{1}{R} e^{\frac{-t}{RC}} \varepsilon(t-t_0)$$



## 例7-6 求图示电路中电流 $i_C(t)$ 。



解

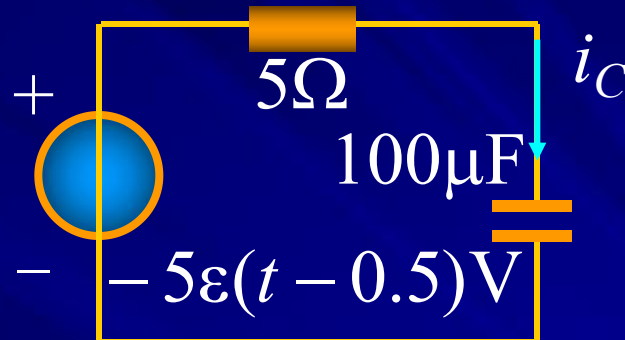
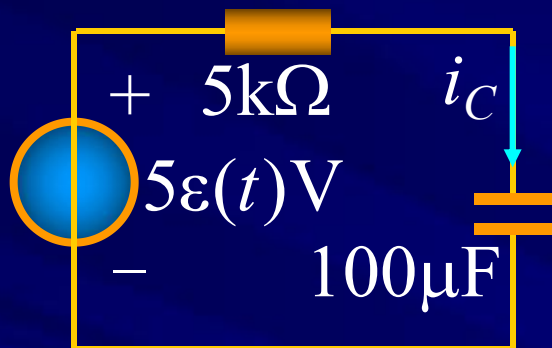


等效

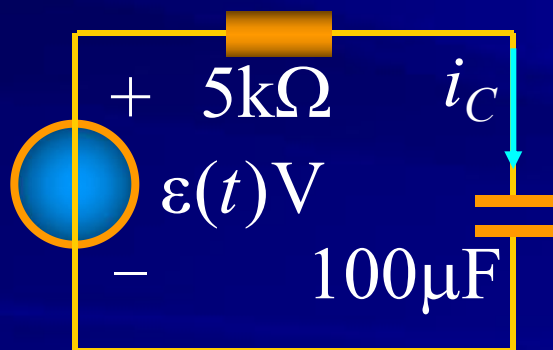
$$u_S = [10\varepsilon(t) - 10\varepsilon(t - 0.5)]\text{V}$$

## 应用叠加定理

$$u_s = [10\varepsilon(t) - 10\varepsilon(t - 0.5)]V$$



## 阶跃响应为



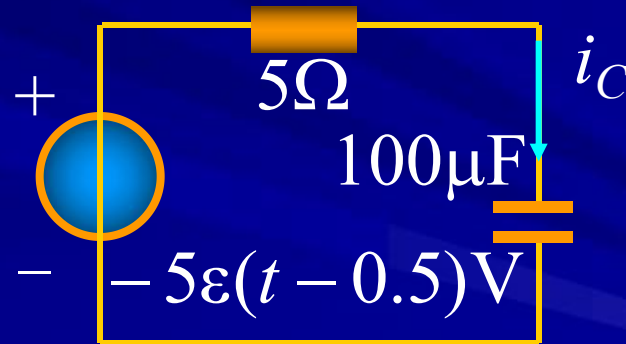
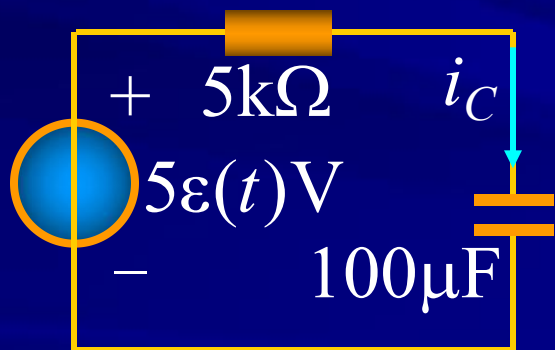
$$\tau = RC = 100 \times 10^{-6} \times 5 \times 10^{-3} s = 0.5s$$

$$u_C(t) = (1 - e^{-2t})\varepsilon(t)V$$

$$i_C = C \frac{du_C}{dt} = \frac{1}{5} e^{-2t} \varepsilon(t) mA$$

由齐次性和叠加性得实际响应为

$$i_C = 5\left[\frac{1}{5}e^{-2t}\varepsilon(t) - \frac{1}{5}e^{-2(t-0.5)}\varepsilon(t-0.5)\right]\text{mA}$$
$$= [e^{-2t}\varepsilon(t) - e^{-2(t-0.5)}\varepsilon(t-0.5)]\text{mA}$$



## 分段表示为

$$i_C = [e^{-2t} \varepsilon(t) - e^{-2(t-0.5)} \varepsilon(t-0.5)] \text{mA}$$

$$0 < t < 0.5\text{s} \quad \varepsilon(t) = 1 \quad \varepsilon(t-0.5) = 0$$

$$i_C = e^{-2t} \text{mA}$$

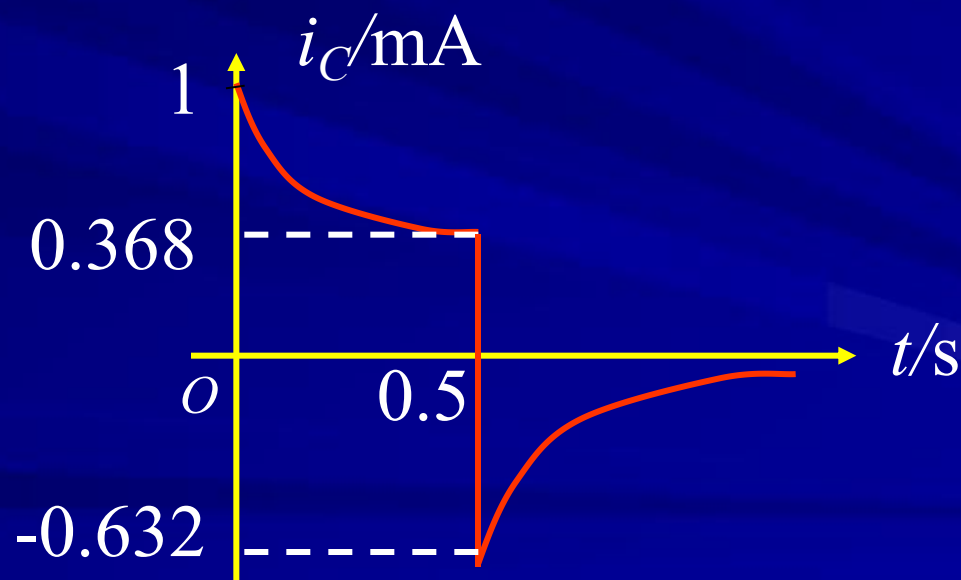
$$0.5\text{s} < t \quad \varepsilon(t) = 1 \quad \varepsilon(t-0.5) = 1$$

$$\begin{aligned} i_C &= (e^{-2t} - e^{-2(t-0.5)}) \text{mA} = e^{-2(t-0.5)} (e^{-1} - 1) \text{mA} \\ &= -0.632e^{-2(t-0.5)} \text{mA} \end{aligned}$$

$$i_C = [e^{-2t}[\varepsilon(t) - \varepsilon(t - 0.5)] - 0.632 e^{-2(t-0.5)} \varepsilon(t - 0.5)] \text{mA}$$

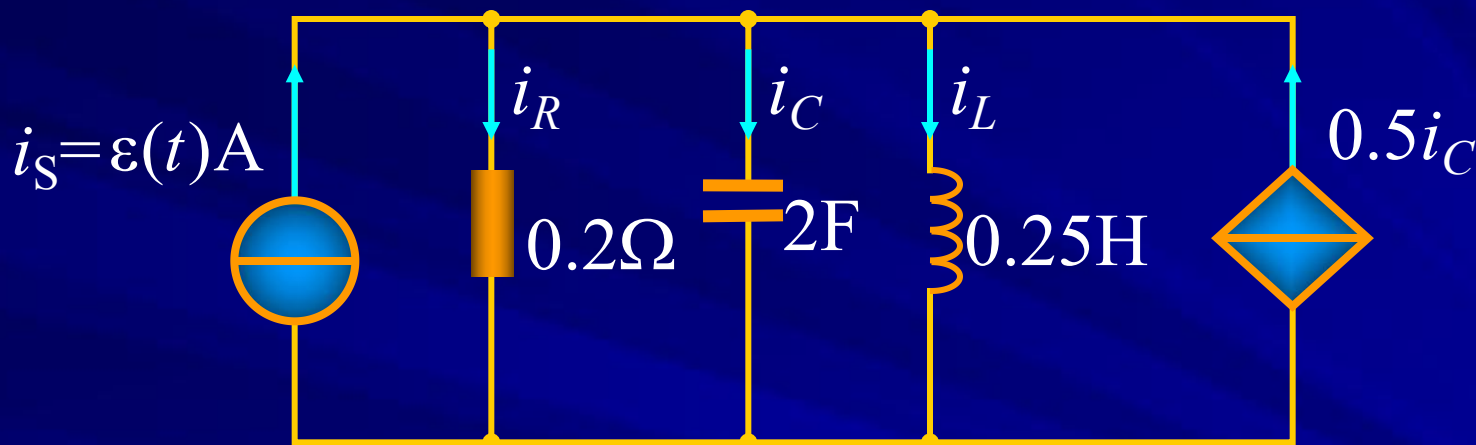
分段表示为  $i_C(t) = \begin{cases} e^{-2t} \text{ mA} & (0 < t < 0.5 \text{ s}) \\ -0.632 e^{-2(t-0.5)} \text{ mA} & (t > 0.5 \text{ s}) \end{cases}$

波形



## 2. 二阶电路的阶跃响应

例7-7 已知图示电路中 $u_C(0_-)=0$ ， $i_L(0_-)=0$ ，求单位阶跃响应  $i_L(t)$ 。



解

对电路应用KCL列结点电流方程有

$$i_R + i_C + i_L - 0.5i_C = i_S$$

$$i_R + 0.5i_C + i_L = \varepsilon(t)$$

$$i_R = \frac{u_R}{R} = \frac{L}{R} \frac{di_L}{dt} \quad i_C = C \frac{du_C}{dt} = LC \frac{d^2 i_L}{dt^2}$$

代入已知参数并整理得：
$$\frac{di_L^2}{dt^2} + 5 \frac{di_L}{dt} + 4i_L = 4\varepsilon(t)$$

这是一个关于的二阶线性非齐次方程，其解为

$$i_L = i' + i''$$

特解  $i' = 1$

通解  $i'' = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}$

特征方程  $p^2 + 5p + 4 = 0$

解得特征根  $p_1 = -1 \quad p_2 = -4$

$$i_L = 1 + A_1 e^{-t} + A_2 e^{-4t}$$

代初始条件  $i_L(0_+) = i_L(0_-) = 0$

$$u_C(0_+) = u_C(0_-) = 0$$

$$\begin{aligned} \rightarrow \begin{cases} 1 + A_1 + A_2 = 0 \\ -A_1 - 4A_2 = 0 \end{cases} &\rightarrow \begin{cases} A_1 = -\frac{4}{3} \\ A_2 = \frac{1}{3} \end{cases} \end{aligned}$$

阶跃响应  $i_L(t) = s(t) = \left(1 - \frac{4}{3}e^{-t} + \frac{1}{3}e^{-4t}\right)\varepsilon(t)A$

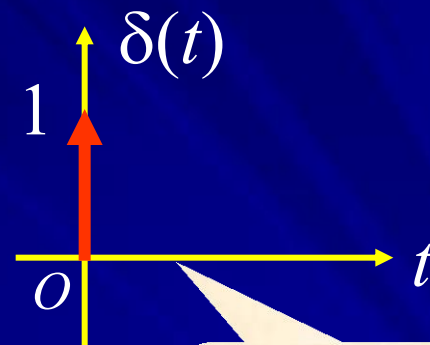
电路的动态过程是过阻尼性质的。

# 7-8 一阶电路和二阶电路的冲激响应

## 1. 单位冲激函数

### ● 定义

$$\begin{cases} \delta(t) = 0 & (t \neq 0) \\ \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1 \end{cases}$$

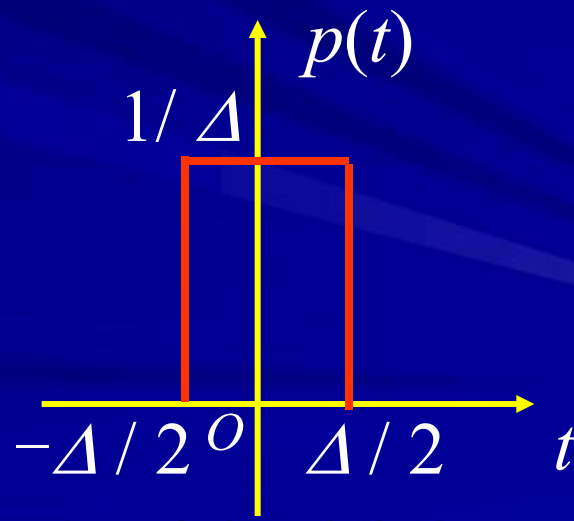


单位脉冲函数的极限

$$p(t) = \frac{1}{\Delta} \left[ \varepsilon\left(t + \frac{\Delta}{2}\right) - \varepsilon\left(t - \frac{\Delta}{2}\right) \right]$$

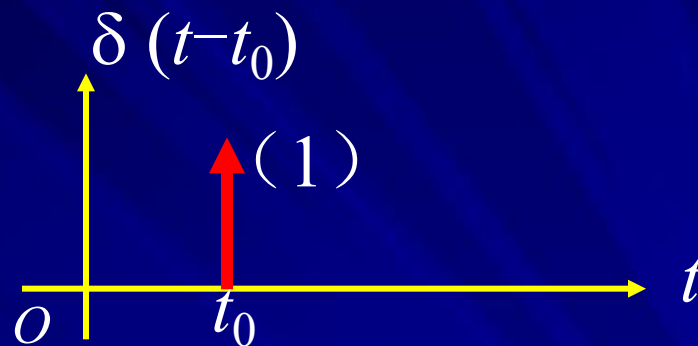
$$\Delta \rightarrow 0 \quad \frac{1}{\Delta} \rightarrow \infty$$

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} p(t) = \delta(t)$$



## ● 单位冲激函数的延迟

$$\begin{cases} \delta(t-t_0) = 0 & (t \neq t_0) \\ \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0) dt = 1 \end{cases}$$



## ● 单位冲激函数的性质

### ① 冲激函数对时间的积分等于阶跃函数

$$\int_{-\infty}^t \delta(t) dt = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases} = \varepsilon(t) \quad \longrightarrow \quad \frac{d\varepsilon(t)}{dt} = \delta(t)$$

## ②冲激函数的“筛分性”

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t)dt = f(0)\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = f(0)$$

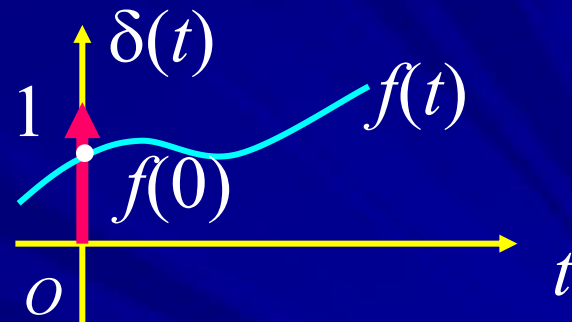
||

$$f(0)\delta(t)$$

同理  $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-t_0)dt = f(t_0)$

例  $\int_{-\infty}^{\infty} (\sin t + t)\delta(t - \frac{\pi}{6})dt$

$$= \sin(\frac{\pi}{6}) + \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} + \frac{\pi}{6} = 1.02$$

**注意** $f(t)$ 在  $t_0$  处连续

## 2. 一阶电路的冲激响应

冲激响应



激励为单位冲激函数时，电路中产生的零状态响应。

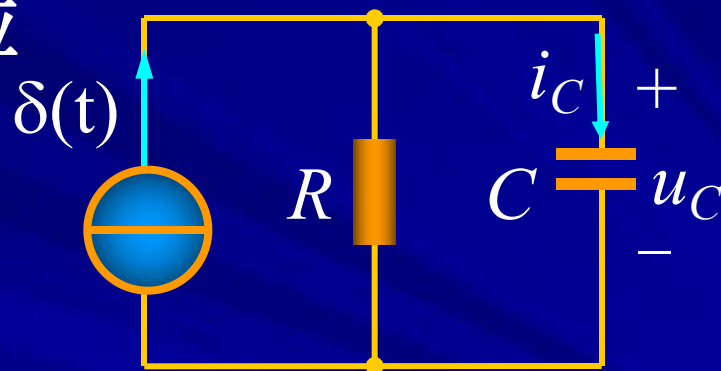
例8-1 求单位冲激电流激励下的RC电路的零状态响应。

**解** 分两个时间段考虑冲激响应

(1)  $t$  在  $0_- \sim 0_+$  间

电容充电，方程为

$$C \frac{du_C}{dt} + \frac{u_C}{R} = \delta(t)$$



$$u_C(0_-) = 0$$



**注意**

$u_C$  不是冲激函数，否则KCL不成立。

$$\int_{0_-}^{0_+} C \frac{du_C}{dt} dt + \int_{0_-}^{0_+} \frac{u_C}{R} dt = \int_{0_-}^{0_+} \delta(t) dt = 1$$

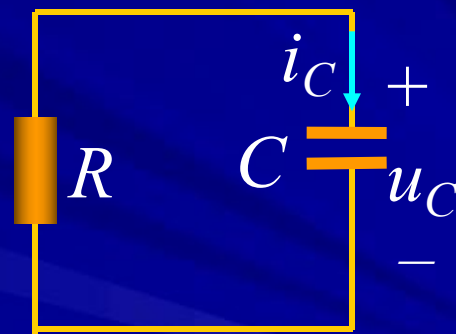
$$\rightarrow C[u_C(0_+) - u_C(0_-)] = 1 \rightarrow u_C(0_+) = \frac{1}{C} \neq u_C(0_-)$$

 **结论** 电容中的冲激电流使电容电压发生跃变。

(2)  $t > 0$  为零输入响应 ( $RC$ 放电)

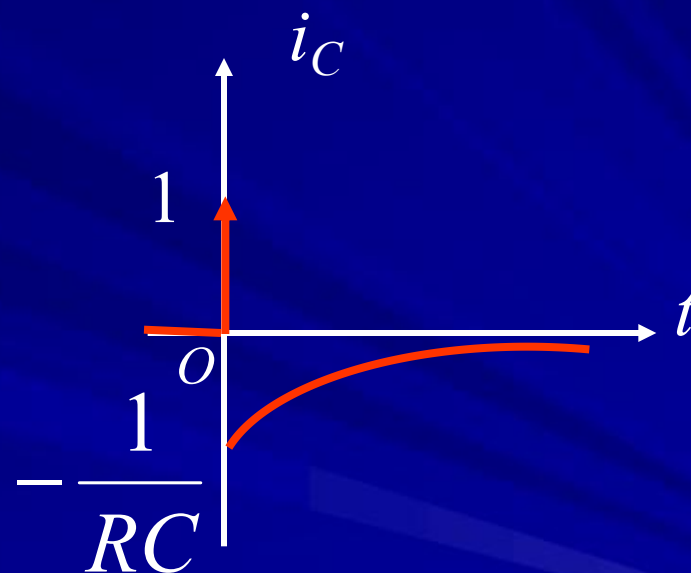
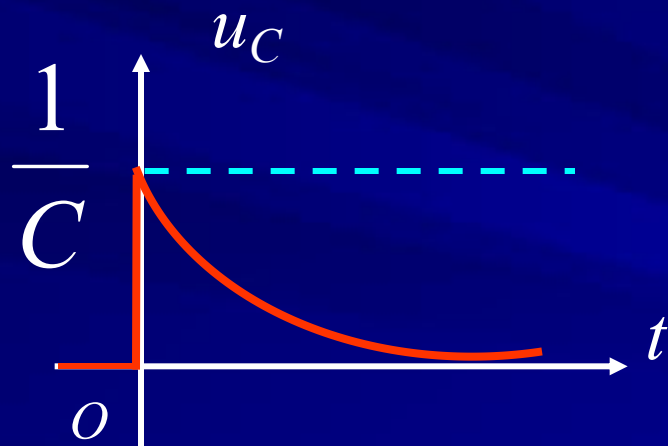
$$u_C = \frac{1}{C} e^{-\frac{t}{RC}} \quad t > 0$$

$$i_C = -\frac{u_C}{R} = -\frac{1}{RC} e^{-\frac{t}{RC}} \quad t > 0$$



$$u_C(0_+) = \frac{1}{C}$$

$$\begin{cases} u_C = \frac{1}{C} e^{-\frac{t}{RC}} \varepsilon(t) \\ i_C = \delta(t) - \frac{1}{RC} e^{-\frac{t}{RC}} \varepsilon(t) \end{cases}$$



## 例8-2 求单位冲激电压激励下的 $RL$ 电路的零状态响应。

**解** 分两个时间段考虑冲激响应

(1)  $t$  在  $0_- \sim 0_+$  间方程为

$$Ri_L + L \frac{di_L}{dt} = \delta(t)$$

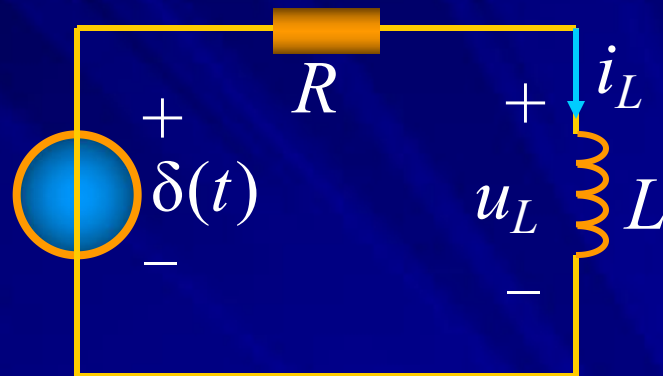
$$\int_{0_-}^{0_+} Ri_L dt + \int_{0_-}^{0_+} L \frac{di_L}{dt} dt = \int_{0_-}^{0_+} \delta(t) dt = 1$$

$$\rightarrow L[i_L(0_+) - i_L(0_-)] = 1 \rightarrow i_L(0_+) = \frac{1}{L} \neq i_L(0_-)$$



**注意**

$i_L$  不是冲激函数，否则KVL不成立。



$$i_L(0_-) = 0$$

$$i_L(0_+) = \frac{1}{L} \neq i_L(0_-)$$



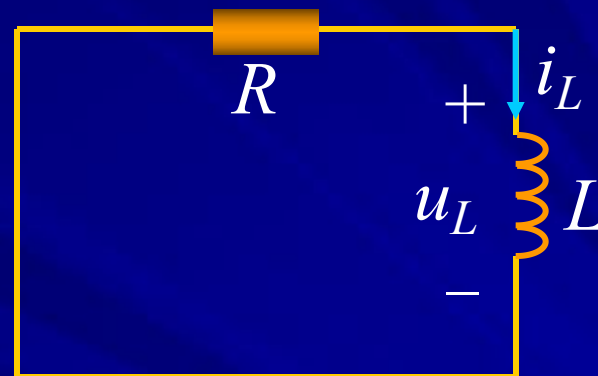
**结论** 电感上的冲激电压使电感电流发生跃变。

(2)  $t > 0$   $RL$ 放电

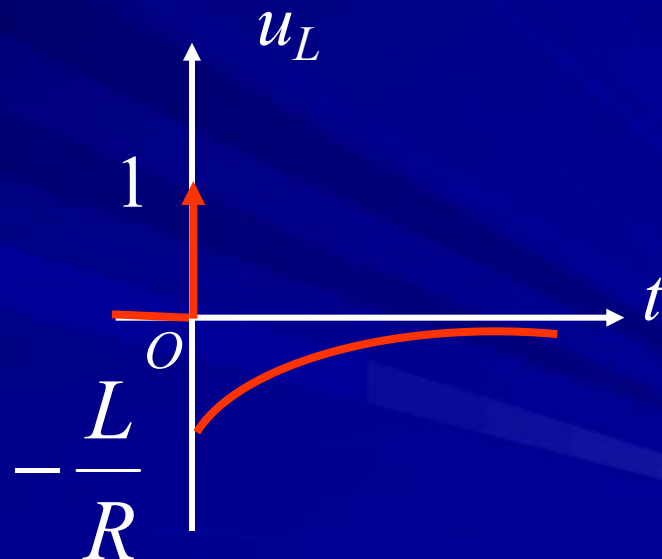
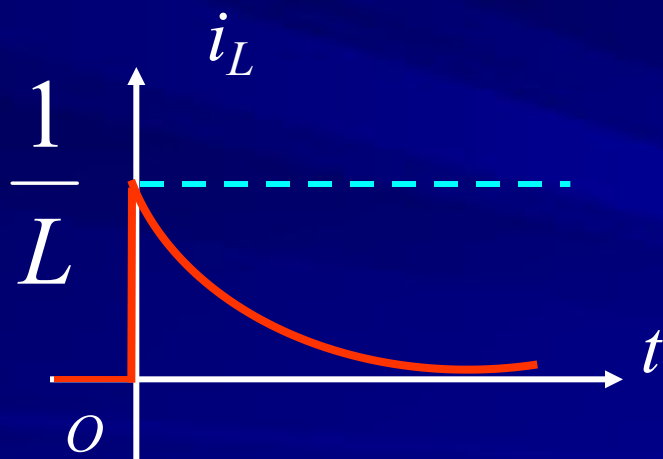
$$\tau = \frac{L}{R} \quad i_L(0_+) = \frac{1}{L}$$

$$i_L = \frac{1}{L} e^{-\frac{t}{\tau}} \quad t > 0$$

$$u_L = -i_L R = -\frac{R}{L} e^{-\frac{t}{\tau}} \quad t > 0$$



$$\begin{cases} i_L = \frac{1}{L} e^{-\frac{t}{\tau}} \varepsilon(t) \\ u_L = \delta(t) - \frac{R}{L} e^{-\frac{t}{\tau}} \varepsilon(t) \end{cases}$$



### 3. 单位阶跃响应和单位冲激响应关系



单位阶跃

$\varepsilon(t)$

单位冲激

$\delta(t)$

单位阶跃响应

$s(t)$

单位冲激响应

$h(t)$

$$\delta(t) = \frac{d\varepsilon(t)}{dt}$$

$$h(t) = \frac{d}{dt}s(t)$$

例8-3 求： $i_s(t)$ 为单位冲激时电路响应 $u_C(t)$ 和 $i_C(t)$ 。

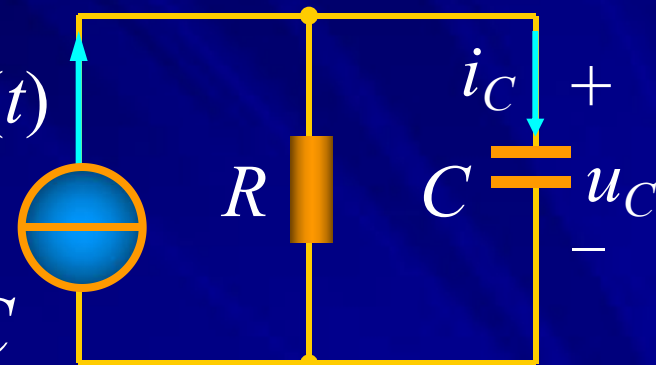
解 先求单位阶跃响应：

$$\text{令 } i_s(t) = \varepsilon(t)$$

$$u_C(0_+) = 0 \quad u_C(\infty) = R \quad \tau = RC$$

$$\longrightarrow u_C(t) = R(1 - e^{-\frac{t}{RC}})\varepsilon(t)$$

$$i_C(0_+) = 1 \quad i_C(\infty) = 0 \quad \longrightarrow i_C = e^{-\frac{t}{RC}}\varepsilon(t)$$



$$u_C(0_-) = 0$$

再求单位冲激响应, 令:  $i_s(t) = \delta(t)$

$$u_C = \frac{d}{dt} R(1 - e^{-\frac{t}{RC}}) \varepsilon(t)$$

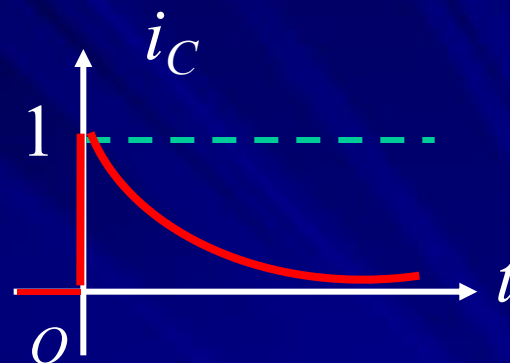
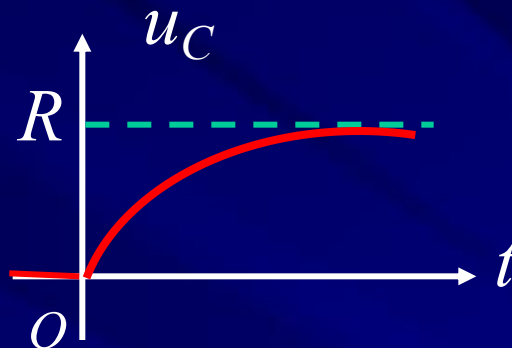
$$= R(1 - e^{-\frac{t}{RC}}) \delta(t) + \frac{1}{C} e^{-\frac{t}{RC}} \varepsilon(t) = \frac{1}{C} e^{-\frac{t}{RC}} \varepsilon(t)$$

$$f(t) \delta(t) = f(0) \delta(t)$$

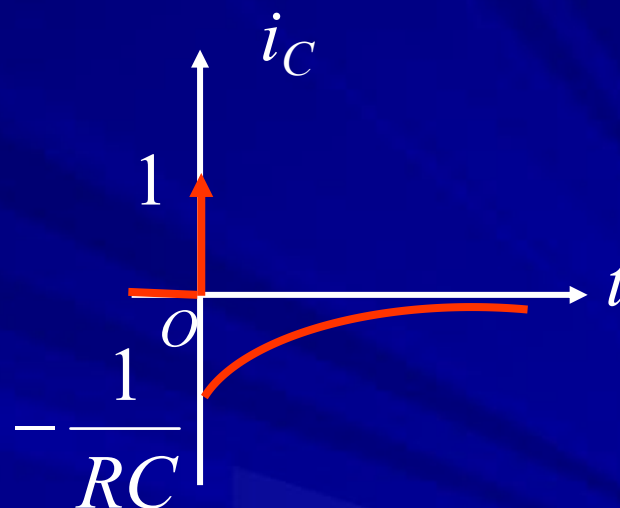
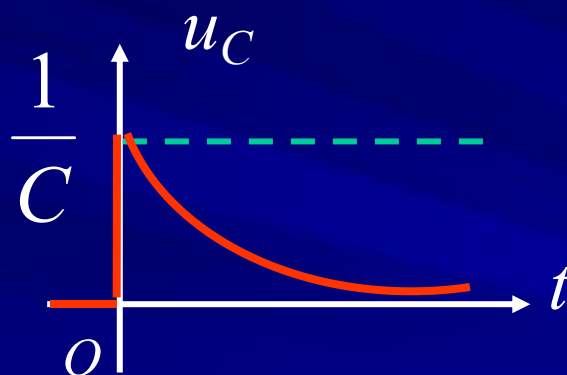
$$i_C = \frac{d}{dt} [e^{-\frac{t}{RC}} \varepsilon(t)] = e^{-\frac{t}{RC}} \delta(t) - \frac{1}{RC} e^{-\frac{t}{RC}} \varepsilon(t)$$

$$= \delta(t) - \frac{1}{RC} e^{-\frac{t}{RC}} \varepsilon(t)$$

## 阶跃响应



## 冲激响应

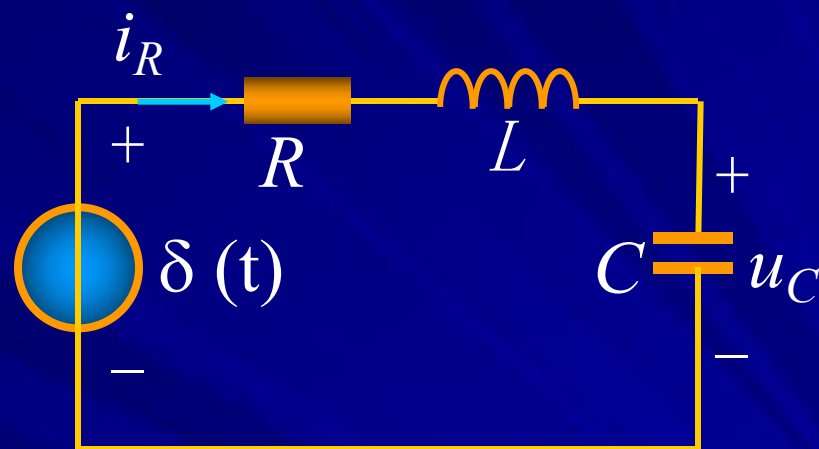


## 4. 二阶电路的冲激响应

例8-4 求单位冲激电压激励下的 $RLC$ 电路的零状态响应。

**解** KVL方程为

$$LC \frac{d^2 u_C}{dt^2} + RC \frac{du_C}{dt} + u_C = \delta(t)$$



$$\int_{0_-}^{0_+} LC \frac{d^2 u_C}{dt^2} dt + \int_{0_-}^{0_+} RC \frac{du_C}{dt} dt + \int_{0_-}^{0_+} u_C dt = \int_{0_-}^{0_+} \delta(t) dt$$

有限值

有限值

$t$  在  $0_-$  至  $0_+$  间

$$\int_{0_-}^{0_+} LC \frac{d^2 u_C}{dt^2} dt = 1$$

$$\int_{0_-}^{0_+} LC \frac{d^2 u_C}{dt^2} dt = 1 \rightarrow LC \frac{du_C}{dt}(0_+) - LC \frac{du_C}{dt}(0_-) = 1$$

$$\rightarrow i_L(0_+) = i_C(0_+) = \frac{1}{L} \quad u_C(0_+) = u_C(0_-) = 0$$

$t > 0$  为零输入响应

$$LC \frac{d^2 u_C}{dt^2} + RC \frac{du_C}{dt} + u_C = 0$$

$$R > 2\sqrt{\frac{L}{C}} \rightarrow u_C = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}$$

$$\begin{cases} A_1 + A_2 = 0 \\ A_1 p_1 + A_2 p_2 = \frac{1}{LC} \end{cases} \quad A_2 = -A_1 = \frac{\frac{1}{LC}}{p_2 - p_1}$$

$$u_C = \frac{-1}{LC(p_2 - p_1)} (e^{p_1 t} - e^{p_2 t}) \varepsilon(t)$$

$$R < 2\sqrt{\frac{L}{C}} \quad (p_{1,2} = -\delta \pm j\omega)$$

$$u_C = Ae^{-\delta t} \sin(\omega t + \beta)$$

$$\longrightarrow u_C = \frac{1}{\omega LC} e^{-\delta t} \sin(\omega t) \varepsilon(t)$$

## \*7-9 卷积积分

### 1. 卷积积分

#### ●定义

设函数  $f_1(t)$ 、 $f_2(t)$   $t < 0$  均为零

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_0^t f_1(t - \xi) f_2(\xi) d\xi$$

#### ●性质

$$f_1(t) * f_2(t) = f_2(t) * f_1(t)$$

证明  $f_1(t) * f_2(t) = \int_0^t f_1(t - \xi) f_2(\xi) d\xi$

令  $\tau = t - \xi$   
 $d\xi = -d\tau$   
 $\xi: 0 \quad t$   
 $\tau: t \quad 0$

$$= \int_t^0 f_1(\tau) f_2(t - \tau) (-d\tau)$$
$$= \int_0^t f_2(t - \tau) f_1(\tau) d\tau$$
$$= f_2(t) * f_1(t)$$

## 2. 卷积积分的应用

激励  $e(t)$

线性网络  
零状态

响应  $r(t)$

激励  $e(t)$ 线性网络  
零状态响应  $r(t)$ 若  $f_1(t) = h(t)$  ——— 冲激响应  $f_2(t) = e(t)$ 则  $r(t) = f_1(t) * f_2(t) = h(t) * e(t)$ 

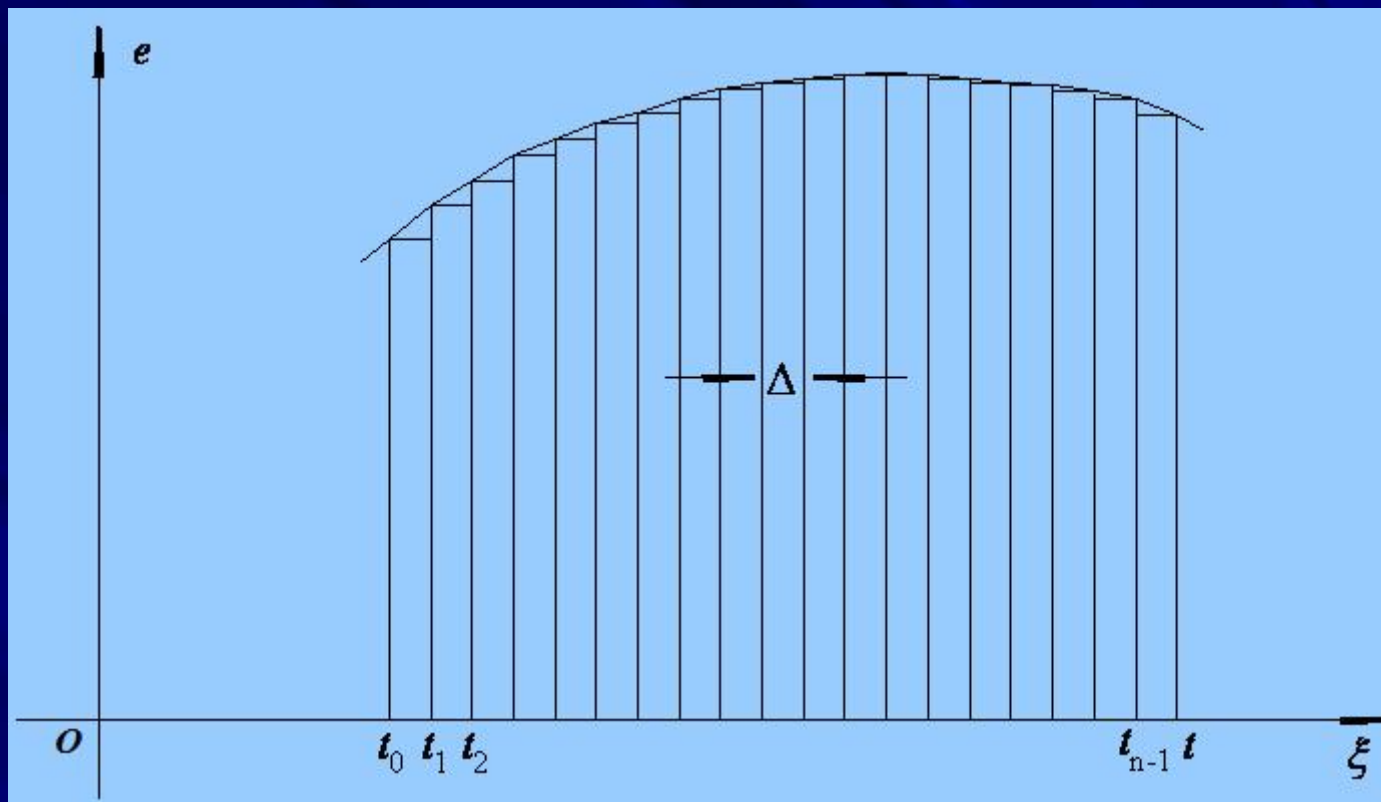
$$\rightarrow r(t) = \int_0^t h(t - \xi) e(\xi) d\xi$$



## 物理解释

将激励  $e(t)$  近似看成一系列具有相同宽度的矩形脉冲的叠加，





$$t_1 - t_0 = t_2 - t_1 = \cdots = t_{k+1} - t_k = \Delta$$

$$e_{\Delta}(\xi) = e(t_0)p_{\Delta}(\xi - t_0)\Delta + e(t_1)p_{\Delta}(\xi - t_1)\Delta + \\ e(t_2)p_{\Delta}(\xi - t_2)\Delta + \cdots + e(t_k)p_{\Delta}(\xi - t_k)\Delta$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} e(t_k) p_{\Delta}(\xi - t_k) \Delta$$

若单位脉冲函数  $p(t)$  的零状态响应为  $h_{\Delta}(t)$

第1个矩形脉冲

$$e(t_1) p_{\Delta}(\xi - t_1) \Delta \xrightarrow{\text{响应}} e(t_1) h_{\Delta}(t - t_1) \Delta$$

⋮

第 $k$ 个矩形脉冲

$$e(t_k) p_{\Delta}(\xi - t_k) \Delta \xrightarrow{\text{响应}} e(t_k) h_{\Delta}(t - t_k) \Delta$$

⋮

根据叠加定理， $t$  时刻观察到的响应应为  $0 \sim t$  时间内所有激励产生的响应的和

$$r_{\Delta}(t) = \sum_{k=0}^{n-1} e(t_k) h_{\Delta}(\xi - t_k) \Delta$$

当  $n \rightarrow \infty$   $\Delta \rightarrow 0$  ,  $h_{\Delta} \rightarrow h$  ,  $e_{\Delta} \rightarrow e(t)$  ,  $r_{\Delta} \rightarrow r(t)$   
 $\Delta \rightarrow d\xi$  ,  $t_k \rightarrow \xi$

$$\rightarrow r(t) = \int_{t_0}^t h(t - \xi) e(\xi) d\xi$$

若  $t_0 = 0$   $r(t) = \int_0^t h(t - \xi) e(\xi) d\xi$

例9-1 已知：  $R=500\text{ k}\Omega$  ,  $C=1\text{ }\mu\text{F}$  ,  $u_C(0)=0$

$i_S = 2e^{-t}\varepsilon(t)\mu\text{A}$  , 求  $u_C(t)$ 。

**解** 先求电路的冲激响应  $h(t)$ 。

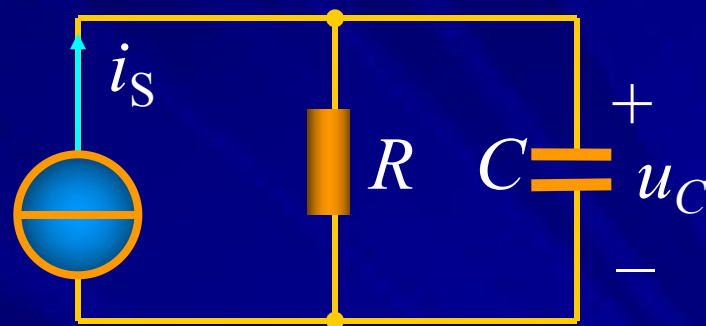
$$i_S = \delta(t)\mu\text{A}$$

$$u_C(0_+) = \frac{1}{C} \int_{0_-}^{0_+} i_S dt$$

$$= \frac{1}{C} \int_{0_-}^{0_+} \delta(t) dt = \frac{10^{-6}}{C} = 1\text{V}$$

$$u_C(\infty)=0 \quad \tau = RC = 500 \times 10^3 \times 10^{-6} \text{s} = 0.5 \text{s}$$

→  $h(t) = e^{-2t}\varepsilon(t)\text{V}$



再计算  $i_s = 2e^{-t}\varepsilon(t)\mu\text{A}$  时的响应  $u_C(t)$ 。

$$\begin{aligned}u_C(t) &= i_s(t) * h(t) = \int_0^t i_s(\xi)h(t-\xi)d\xi \\&= \int_0^t 2 \times 10^{-6} e^{-\xi} \times e^{-2(t-\xi)} d\xi \text{ V} \\&= 2 \times 10^{-6} e^{-2t} \int_0^t e^{\xi} d\xi \text{ V} = 2 \times 10^{-6} e^{-2t} (e^t - 1) \text{ V} \\&= (2e^{-t} - 2e^{-2t})\varepsilon(t)\mu\text{V}\end{aligned}$$

例9-2 设例1中的  $i_s = [\varepsilon(t) - \varepsilon(t-1)]\mu\text{A}$ ，求  $u_C(t)$ 。

解

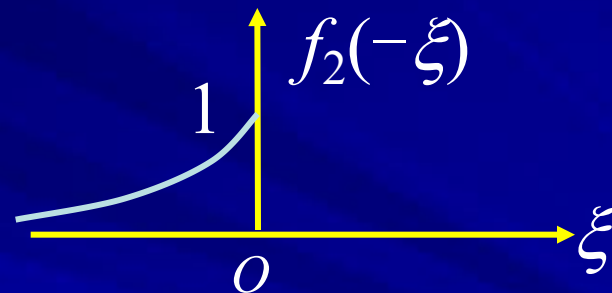
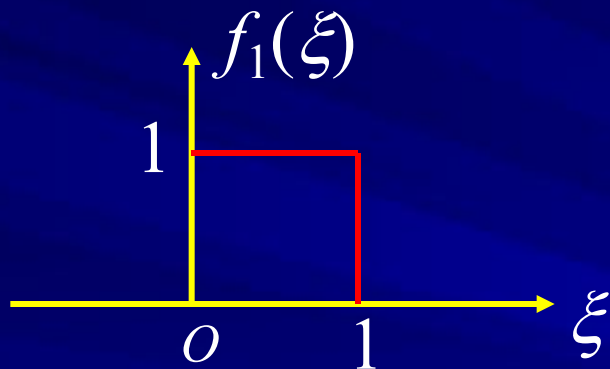
设：  $f_1(t) = [\varepsilon(t) - \varepsilon(t-1)]$

$$f_2(t) = e^{-2t}\varepsilon(t)$$

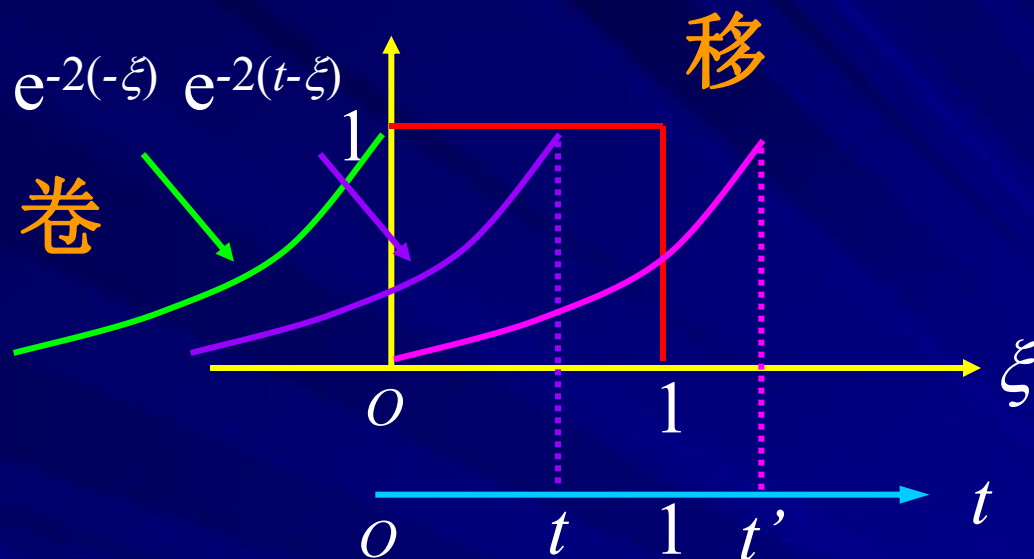
$$f_1(t) * f_2(t) = \int_0^t \underbrace{f_1(\xi)f_2(t-\xi)}_{\text{被积函数}} d\xi$$

积分变量  
参变量

由图解过程确定积分上、下限：



$$u_C(t) = f_1(t) * f_2(t) = [\varepsilon(t) - \varepsilon(t-1)] * e^{-2t}$$



积

$$t < 0 \quad u_C(t) = 0$$

$$0 < t < 1 \quad u_C(t) = \int_0^t 1 e^{-2(t-\xi)} d\xi = \frac{1}{2}(1 - e^{-2t})V$$

$$1 < t \quad u_C(t) = \int_0^1 e^{-2(t-\xi)} d\xi = \frac{1}{2}(e^2 - 1)e^{-2t}V$$

## \*7-10 状态方程

### 1. 网络的状态与状态变量

- 网络状态

指能和激励一道唯一确定网络现在和未来行为的最少量的一组信息。

- 状态变量

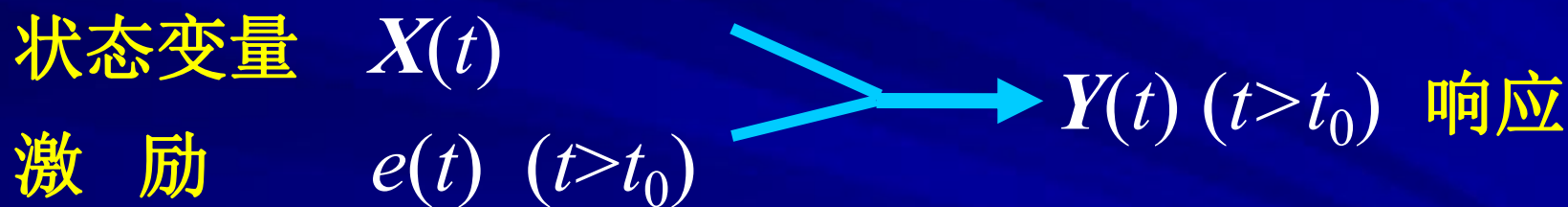
电路的一组独立的动态变量 $X$ ,

$$X=[x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n]^T$$

它们在任何时刻的值组成了该时刻的状态，如独立的电容电压（或电荷），电感电流（或磁通链）就是电路的状态变量。

## ● 状态变量法

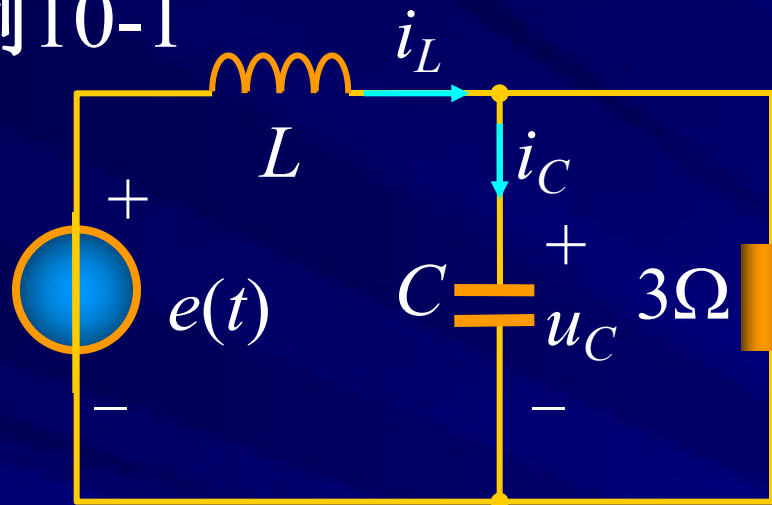
借助于状态变量，建立一组联系状态变量和激励函数的一阶微分方程组，称为状态方程。只要知道状态变量在某一时刻值 $X(t_0)$ ，再知道输入激励 $e(t)$ ，就可以确定 $t > t_0$ 后电路的全部性状(响应)。



注意

这里讲的为数最少的变量必须是互相独立的。

## 例10-1



已知：

$$e(t) = 20 \sin(\omega t + 30^\circ)$$

$$u_C(0_-) = 3V$$

$$i_L(0_-) = 0$$

求：  $i_C(0_+)$ ,  $u_L(0_+)$ ,  $i_R(0_+)$ ,  $u_R(0_+)$ 。

解

$$\left. \begin{array}{l} u_C(0_-) = 3V \\ i_L(0_-) = 0 \end{array} \right\} \rightarrow$$

$$e(0) = 10V$$

$$\left\{ \begin{array}{l} u_R(0_+) = 3V \\ u_L(0_+) = 7V \\ i_R(0_+) = 1A \\ i_C(0_+) = -1A \end{array} \right.$$

同理可推广至任一时刻 $t_1$

|            |                                                                                         |            |
|------------|-----------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| 由 $e(t_1)$ | 求出<br> | $u_R(t_1)$ |
| $u_C(t_1)$ |                                                                                         | $u_L(t_1)$ |
| $i_L(t_1)$ |                                                                                         | $i_R(t_1)$ |
|            |                                                                                         | $i_C(t_1)$ |

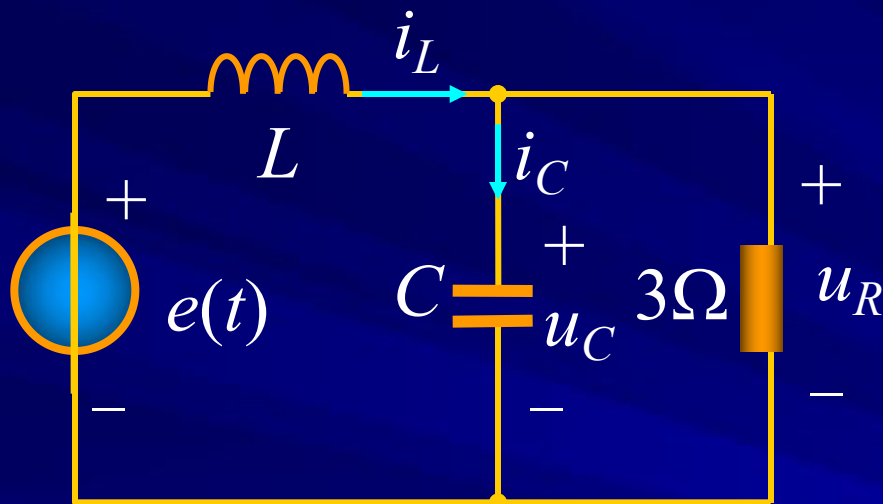


表明

- (1) 状态变量和储能元件有关。
- (2) 有几个独立的储能元件，就有几个状态变量。
- (3) 状态变量的选择不唯一。

## 2. 状态方程的列写

每一个状态方程中只含有一个状态变量的一阶导数。对简单电路采用直观编写法。



设  $u_C$ 、 $i_L$  为状态变量。

$$i_C = C \frac{du_C}{dt} = i_L - \frac{u_C}{R}$$

$$u_L = L \frac{di_L}{dt} = e(t) - u_C$$

整理得

$$\begin{cases} \frac{du_C}{dt} = \frac{i_L}{C} - \frac{u_C}{RC} \\ \frac{di_L}{dt} = \frac{e(t)}{L} - \frac{u_C}{L} \end{cases}$$

状态方程

## 矩阵形式

$$\begin{bmatrix} \frac{d u_C}{dt} \\ \frac{d i_L}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{RC} & \frac{1}{C} \\ -\frac{1}{L} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_C \\ i_L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix} e(t) \quad X(0) = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$



特点

- ① 联立的一阶微分方程组。
- ② 左端为状态变量的一阶导数。
- ③ 右端含状态变量和输入量。

## 一般形式

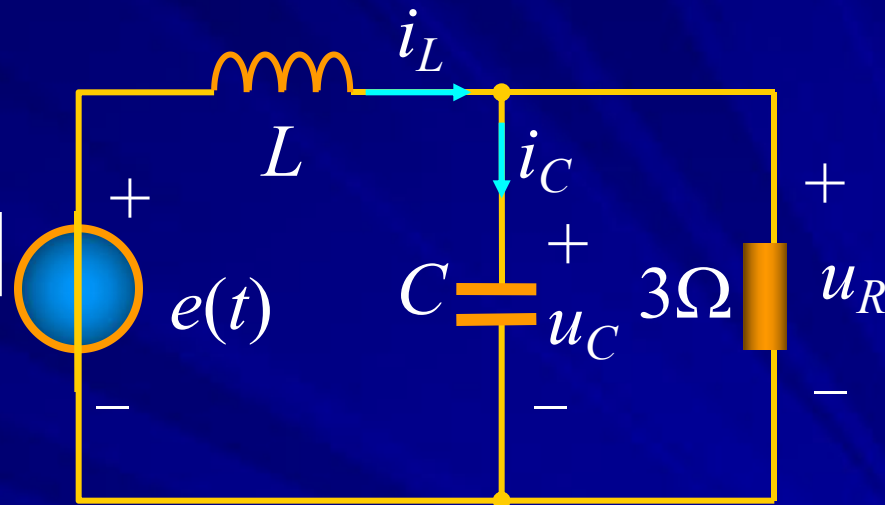
$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{B}\mathbf{V}$$

$$\mathbf{X} = [x_1 \ x_2 \ \cdots \ x_n]^T$$

$$\dot{\mathbf{X}} = \left[ \frac{dx_1}{dt} \quad \frac{dx_2}{dt} \quad \cdots \quad \frac{dx_n}{dt} \right]^T$$

电路的输出方程  $\rightarrow$  电路中某些感兴趣的量与状态变量和输入量之间的关系。

$$\begin{bmatrix} u_L \\ \dot{i}_C \\ u_R \\ \dot{i}_R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \\ -\frac{1}{R} & 0 \\ \frac{1}{R} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_C \\ i_L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} [e(t)]$$



特点

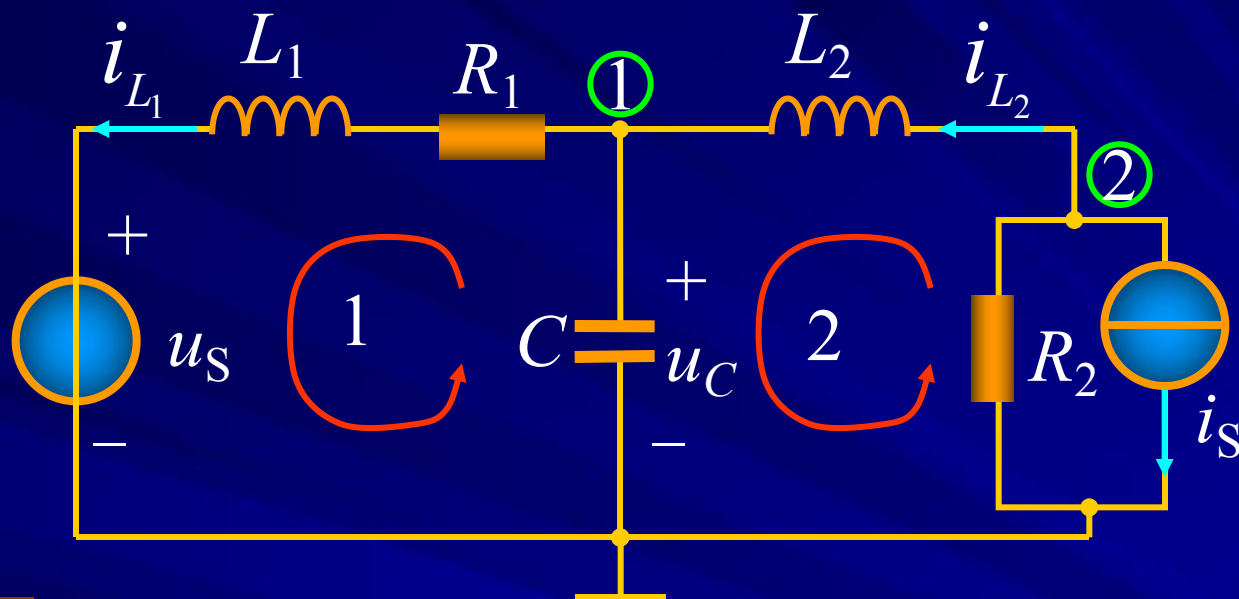
①代数方程。

②用状态变量和输入量表示输出量。

一般形式

$$Y=CX+DV$$

## 例10-2 列出电路的状态方程。



解

对结点①列出KCL方程

$$C \frac{du_C}{dt} = i_{L_1} - i_{L_2}$$

对回路1和回路2列出KVL方程

$$\begin{cases} L_1 \frac{di_{L1}}{dt} = -u_C - R_1 i_{L1} + u_S \\ L_2 \frac{di_{L2}}{dt} = u_C - R_2 (i_{L2} + i_S) \end{cases}$$

把以上方程整理成矩阵形式有

$$\begin{bmatrix} \frac{du_C}{dt} \\ \frac{di_{L1}}{dt} \\ \frac{di_{L2}}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{C} & -\frac{1}{C} \\ -\frac{1}{L_1} & -\frac{R_1}{L_1} & 0 \\ \frac{1}{L_2} & 0 & -\frac{R_2}{L_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_C \\ i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{L_1} & 0 \\ 0 & -\frac{R_2}{L_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_S \\ i_S \end{bmatrix}$$

若以结点①、②的电压作为输出，则有

$$u_{n1} = u_C$$

$$u_{n2} = (i_{L_2} + i_S)R_2$$

整理并写成矩阵形式有

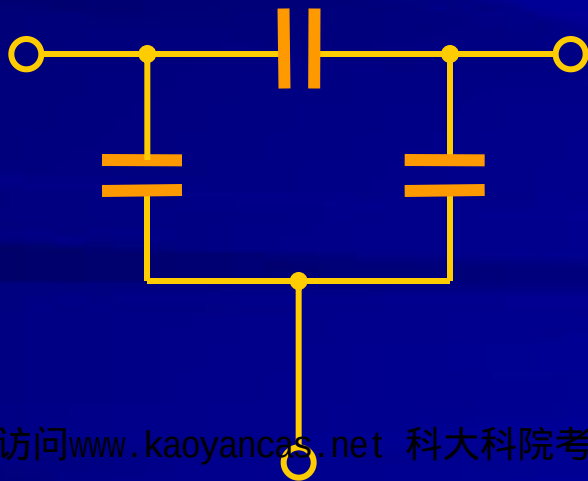
$$\begin{bmatrix} u_{n1} \\ u_{n2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_C \\ i_{L_2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & R_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_S \\ i_S \end{bmatrix}$$

## \*7-11 动态电路时域分析中的几个问题

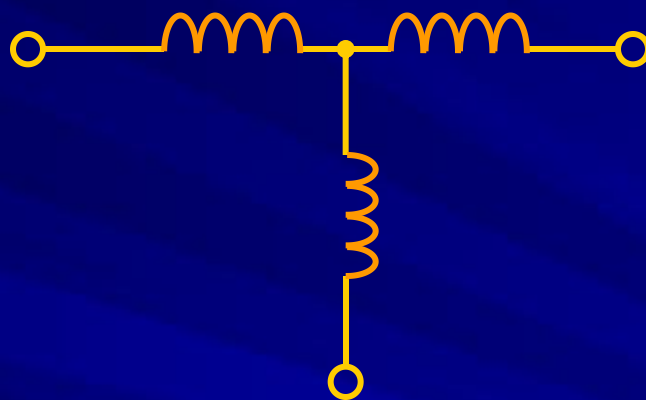
### 1. 动态电路微分方程的阶数与电路结构的关系

动态电路微分方程的阶数与电路中所含的独立动态元件的个数相等。

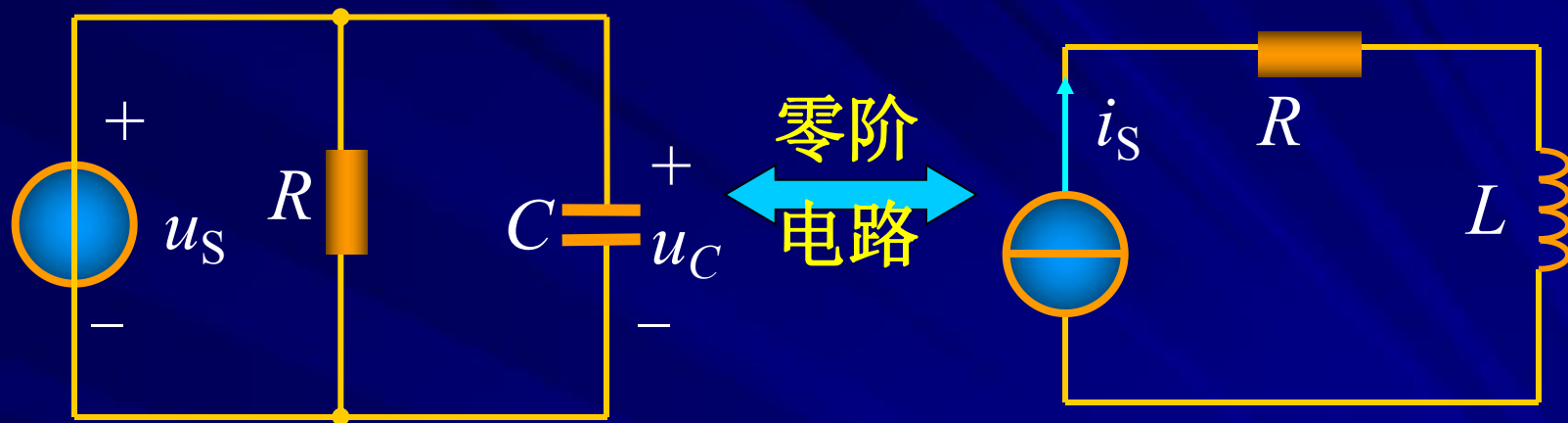
例 ① 当一个网络中存在纯电容回路，由KVL可知其中必有一个电容电压可由回路中其他元件的电压求出，此电容电压为非独立的电容电压。



- ②当网络中存在纯电感结点，由KCL可知其中必有一个电感电流可由其他元件的电流求出，此电感电流是非独立的。



- ③网络中与独立电压源并联的电容元件，其电压  $u_C$  由  $u_S$  决定。
- ④网络中与独立电流源串联的电感元件，其  $i_L$  由  $i_S$  决定。



以上四种情况中非独立的 $u_C$ 和 $i_L$ 不能作为状态变量，不含以上四种情况的网络称为常态网络。状态变量数等于 $C$ 、 $L$ 元件总数。含有以上四种情况的网络称为非常态网络，网络的状态变量数小于网络中 $C$ 、 $L$ 元件总数，下面着重讨论常态网络。

## 2. 动态电路中初始值的计算

对于通常电路，初始值由下面关系确定

$$u_C(0_+) = u_C(0_-) \quad i_L(0_+) = i_L(0_-)$$

在下面情况下  $u_C(0_+) \neq u_C(0_-)$

$$i_L(0_+) \neq i_L(0_-)$$

- ①换路后的电路有纯电容构成的回路，或有由电容和独立电压源构成的回路，且回路中各个电容上电压值 $u_C(0_-)$ 的代数和不等于该回路中各个电压源初始值的代数和。

②换路后的电路有纯电感构成的结点（或割集）或有由电感和独立电流源构成的结点（或割集），且结点上各电感的电流值 $i_L(0_-)$ 与电流源电流的初始值的代数和不等于零，

在上述两种情况下，求初始值，必须遵循换路前后电路中电荷守恒和磁通链守恒的约束关系，即

$$\sum q_k(0_+) = \sum q_k(0_-)$$

或

$$\sum C_k u_k(0_+) = \sum C_k u_k(0_-)$$

$$\sum \Psi_k(0_+) = \sum \Psi_k(0_-)$$

或

$$\sum L_k i_k(0_+) = \sum L_k i_k(0_-)$$