第二章（下）动量定理 动能定理

力的积累效应
- 时间积累—动量定理
- 空间积累—动能定理

动量定理

theorem of momentum

- 牛顿第二定律的微分形式

$$\boxed{\vec{F} = m\vec{a} = m d\vec{v} / dt}$$

$$\boxed{\vec{F} = d\vec{p} / dt}$$

$\boxed{\text{瞬时性}}$

容易：加速度
不容易：速度（一般需要积分）

？有无便于求速度的积分形式？

一　冲量 质点的动量定理

- 动量　$\boxed{\vec{p} = m\vec{v}}$

$$\vec{F} = \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(m\vec{v})}{\mathrm{d}t} \qquad \vec{F}\mathrm{d}t = \mathrm{d}\vec{p} = \mathrm{d}(m\vec{v})$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{F}\mathrm{d}t = \vec{p}_2 - \vec{p}_1 = m\vec{v}_2 - m\vec{v}_1$$

- 冲量　力对时间的积分（矢量）$\vec{I} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}\mathrm{d}t$

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{F} \mathrm{d} t=\vec{p}_2-\vec{p}_1=m \vec{v}_2-m \vec{v}_1$$

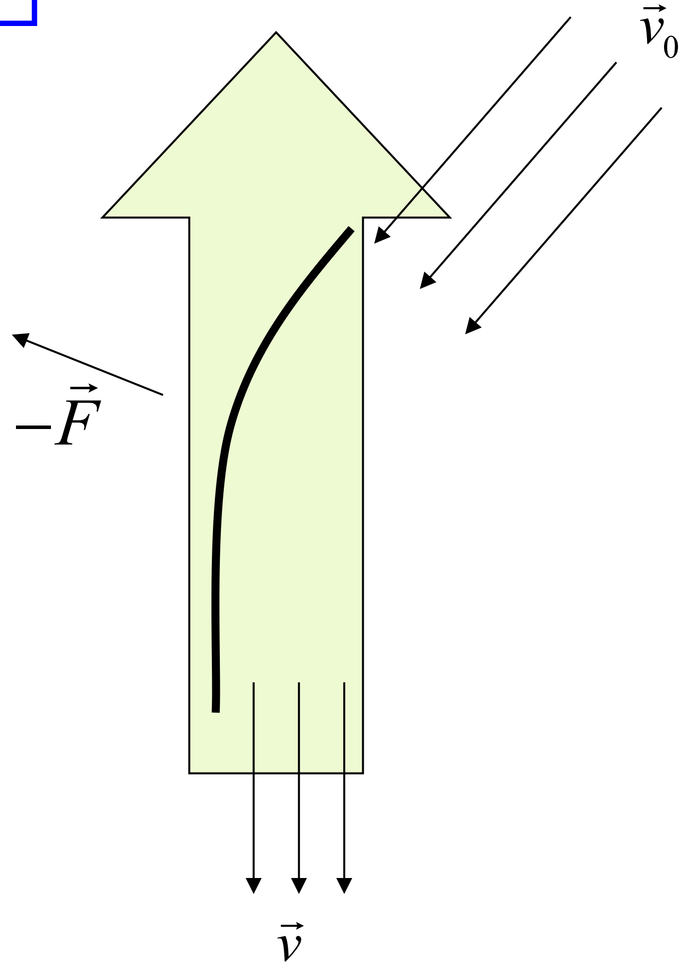
动量定理 在给定的时间内，外力作用在质点上的冲量，等于质点在此时间内动量的增量．

◆ 分量形式

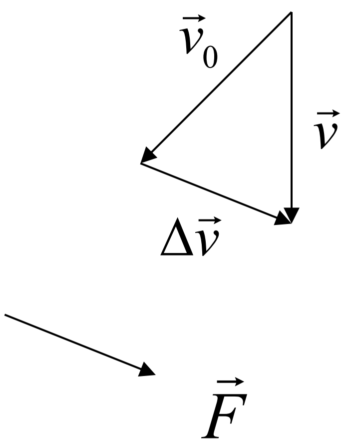
$$\vec{I}=I_x\vec{i}+I_y\vec{j}+I_z\vec{k}$$

$$\begin{cases} I_x=\int_{t_1}^{t_2}F_x\mathrm{d}t=mv_{2x}-mv_{1x} \\ I_y=\int_{t_1}^{t_2}F_y\mathrm{d}t=mv_{2y}-mv_{1y} \\ I_z=\int_{t_1}^{t_2}F_z\mathrm{d}t=mv_{2z}-mv_{1z} \end{cases}$$

逆风行舟



矢量作图



单位：

冲量：N·s

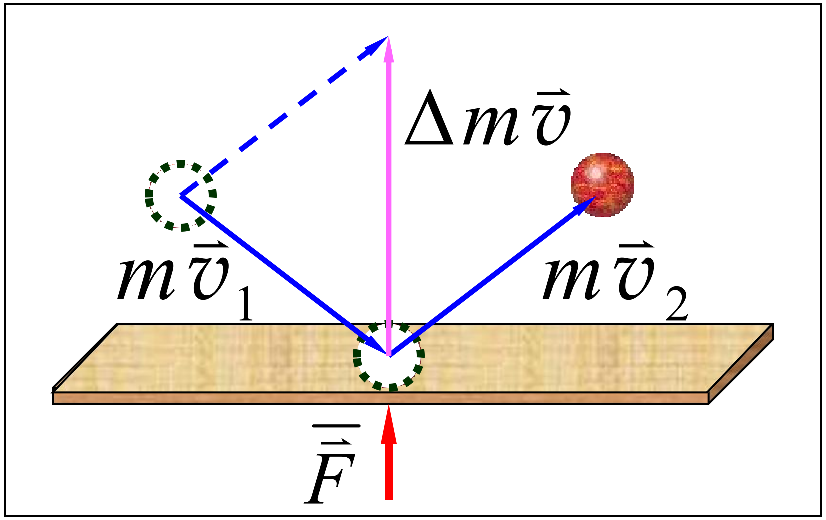
动量：kg·m/s

$1N=1kg \cdot m/s^2$

冲量主要应用在碰撞或冲击问题上

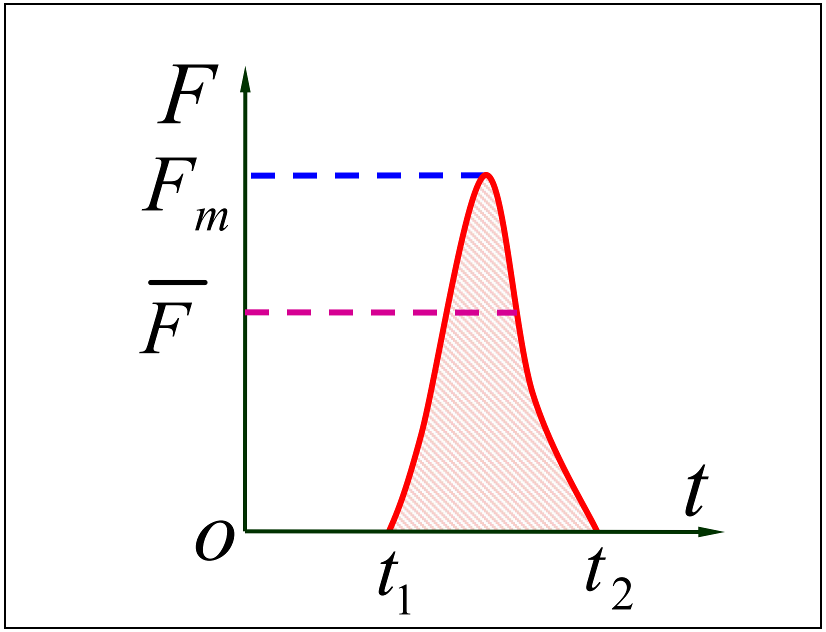
平均冲力

$$\overline{\vec{F}}=\frac{\int_{t_1}^{t_2}\vec{F}\mathrm{d}t}{t_2-t_1}=\frac{m\vec{v}_2-m\vec{v}_1}{t_2-t_1}$$

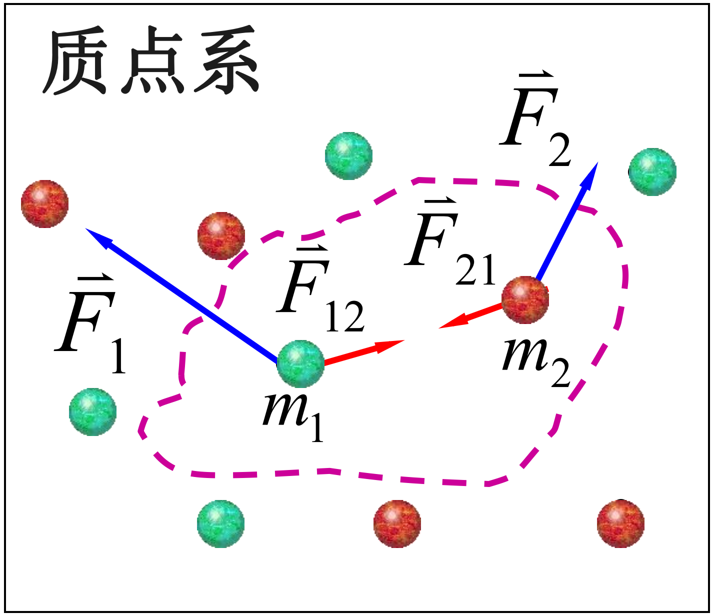


注意

在 $\Delta\vec{p}$ 一定时 Δt 越小，则 $\overline{F}$ 越大．例如人从高处跳下、飞机与鸟相撞、打桩等碰撞事件中，作用时间很短，冲力很大．



质点系的动量定理



$$\int_{t_1}^{t_2}(\vec{F}_1+\vec{F}_{12})\mathrm{d}t = m_1\vec{v}_1 - m_1\vec{v}_{10}$$

$$\int_{t_1}^{t_2}(\vec{F}_2+\vec{F}_{21})\mathrm{d}t = m_2\vec{v}_2 - m_2\vec{v}_{20}$$

因为内力 $\vec{F}_{12}+\vec{F}_{21}=0$，故

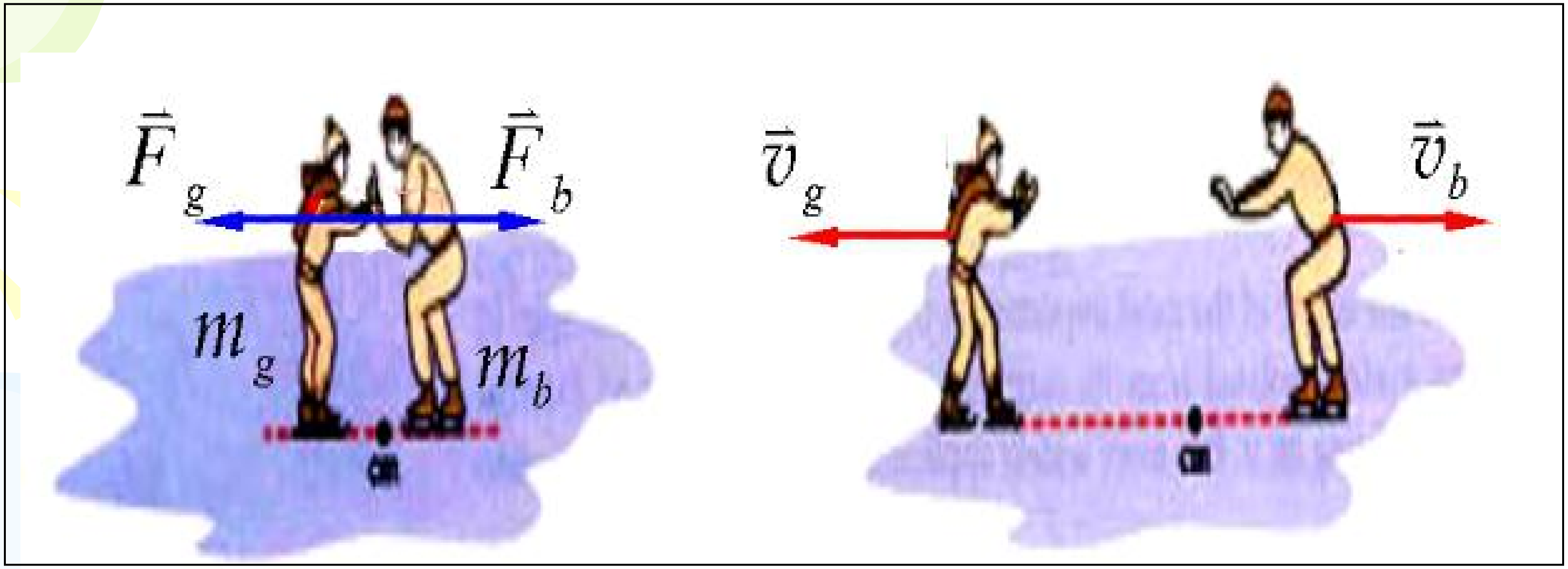
$$\int_{t_1}^{t_2}(\vec{F}_1+\vec{F}_2)\mathrm{d}t = (m_1\vec{v}_1+m_2\vec{v}_2)-(m_1\vec{v}_{10}+m_2\vec{v}_{20})$$

注意　内力不改变质点系的动量

◆ **质点系动量定理** 作用于系统的合外力的冲量等于系统动量的增量.

$$\int_{t_1}^{t_2}\vec{F}^{\,\mathrm{ex}}\,\mathrm{d}t=\sum_{i=1}^{n}m_i\vec{v}_i-\sum_{i=1}^{n}m_i\vec{v}_{i0}$$

$$\vec{I}=\vec{p}-\vec{p}_0$$



初始速度 $v_{g0}=v_{b0}=0$ $m_b=2m_g$ 则 $\vec{p}_0=0$

推开后速度 $v_g=2v_b$ 且方向相反 则 $\vec{p}=0$

推开前后系统动量不变 $\vec{p}=\vec{p}_0$

变质量体的力学

火箭初始质量m_0，设在外太空受合力为0，燃料对火箭的相对速度大小 C 不变，求当火箭质量为m时的速度？

设在很短一段时间dt内喷出的燃料质量为dm。
质量为m的火箭速度由v变为v＋dv，
质量为dm的燃料速度由v变为v－C，则

$$m(v+dv-v)+dm(v-C-v)=F=0$$

$$mdv-dmC=0$$

$$dv=C\frac{dm}{m} \qquad \int_0^v dv=C\int_{m_0}^m \frac{dm}{m}$$

$$\int_0^v dv = C\int_{m_0}^{m}\frac{dm}{m} \qquad v = -C\ln\frac{m_0}{m}$$

讨论： 怎样提高火箭速度？

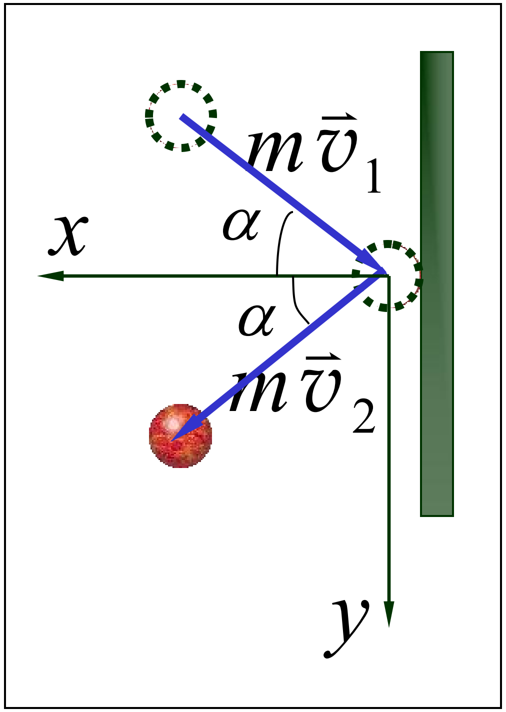
1 相对速度C需要小于0，即燃料的绝对速度与火箭方向相反；(燃烧获得的C的大小约5000m/s)

2, 光子火箭，离子火箭的设想；

3 初始质量中燃料质量与有效载荷的比例。

多级火箭的出现

例 1 一质量为0.05kg、速率为$10\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$的刚球,以与钢板法线呈45°角的方向撞击在钢板上,并以相同的速率和角度弹回来.设碰撞时间为0.05s.求在此时间内钢板所受到的平均冲力 $\overline{F}$.（忽略重力）



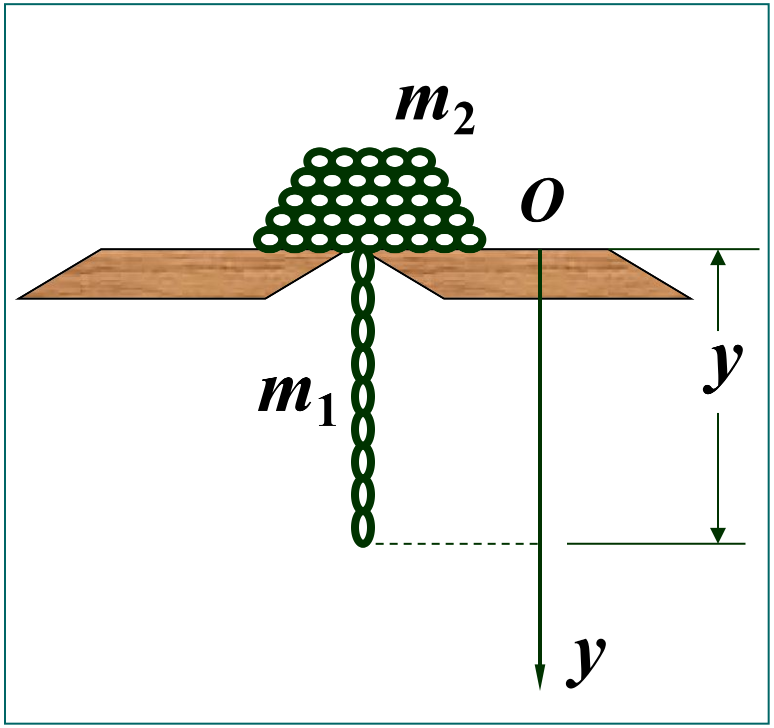
解 建立如图坐标系, 由动量定理得

$$\overline{F}_x \Delta t = mv_{2x} - mv_{1x}$$
$$= mv\cos\alpha - (-mv\cos\alpha)$$
$$= 2mv\cos\alpha$$

$$\overline{F}_y \Delta t = mv_{2y} - mv_{1y}$$
$$= mv\sin\alpha - mv\sin\alpha = 0$$

$$\overline{F} = \overline{F}_x = \frac{2mv\cos\alpha}{\Delta t} = 14.1\text{N}$$ 方向沿 x 轴反向

例 2　一柔软链条长为l,单位长度的质量为λ.链条放在桌上,桌上有一小孔,链条一端由小孔稍伸下,其余部分堆在小孔周围.由于某种扰动,链条因自身重量开始落下．求链条下落速度与落下距离之间的关系．设链与各处的摩擦均略去不计,且认为链条软得可以自由伸开．



解　以竖直悬挂的链条和桌面上的链条为一系统,建立如图坐标

则 $F^{\mathrm{ex}}=m_1 g=\lambda y g$

由质点系动量定理得

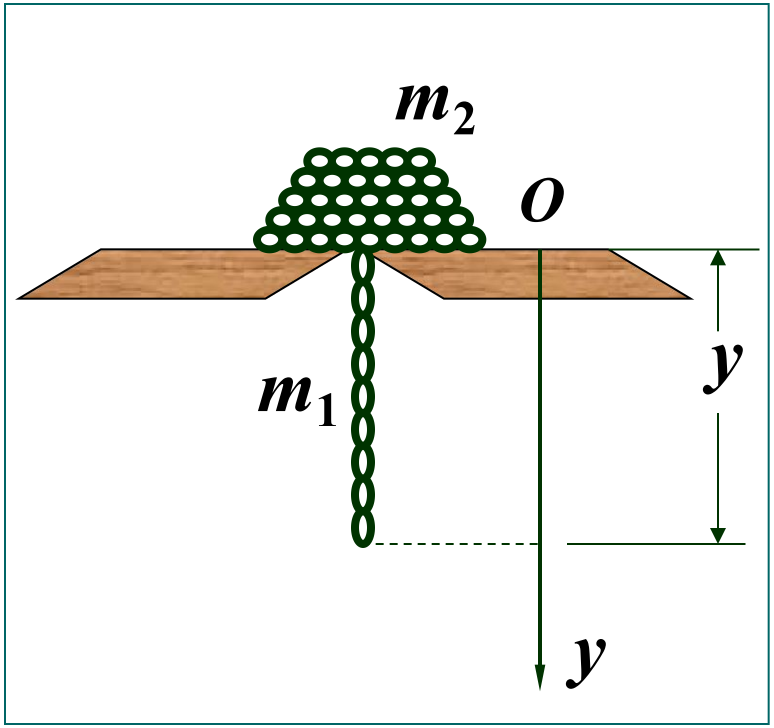
$$F^{\mathrm{ex}}\mathrm{d}t=\mathrm{d}p$$

$$F^{\mathrm{ex}}\mathrm{d}t = \mathrm{d}p$$

又 $\mathrm{d}p = dm_1 v = \lambda\,\mathrm{d}(yv)$

$\therefore$ $\lambda y g\,\mathrm{d}t = \lambda\,\mathrm{d}(yv)$

则 $yg = \dfrac{\mathrm{d}(yv)}{\mathrm{d}t}$ 凑项



两边同乘以 $y\mathrm{d}y$ 则

$$y^2 g\mathrm{d}y = y\mathrm{d}y\frac{\mathrm{d}(yv)}{\mathrm{d}t} = yv\,\mathrm{d}(yv)$$

$$\frac{1}{3}gy^3 = \frac{1}{2}(yv)^2$$

$$g\int_0^y y^2\,\mathrm{d}y = \int_0^{yv} yv\,\mathrm{d}(yv)$$

$$v = \left(\frac{2}{3}gy\right)^{1/2}$$

动能定理

theorem of kinetic energy

力的空间累积效应：$\vec{F}$ 对 $\vec{r}$ 积累 ⟶ W，动能定理.

一 功

力对质点所作的功为力在质点位移方向的分量与位移大小的乘积 .（功是标量，过程量）

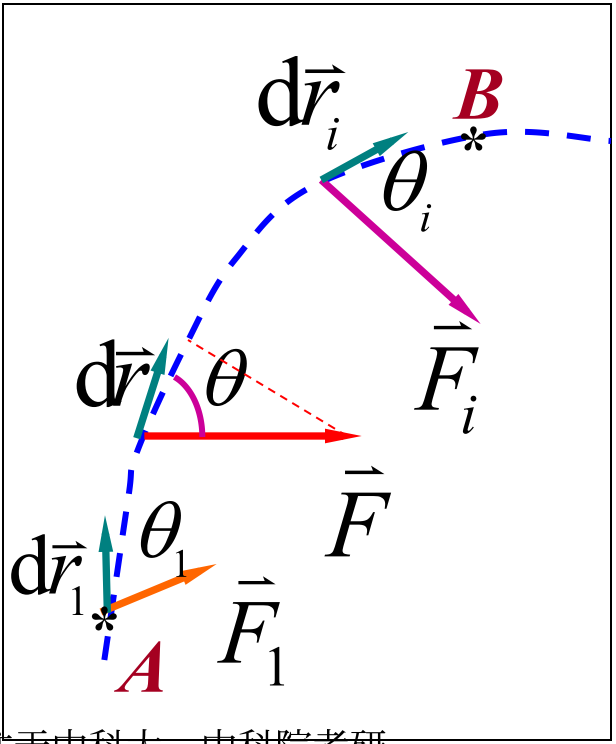
$$\mathrm{d}W = F\cos\theta|\mathrm{d}\vec{r}| = F\cos\theta\mathrm{d}s$$

$$\mathrm{d}W = \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r}$$

$0° < \theta < 90°$， $\mathrm{d}W > 0$

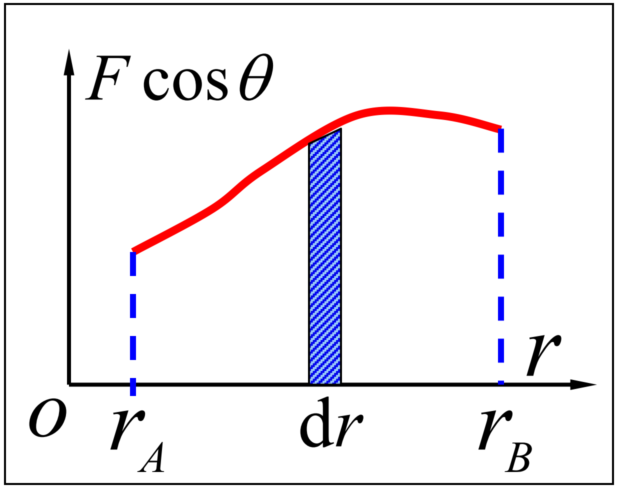
$90° < \theta < 180°$， $\mathrm{d}W < 0$

$\theta = 90°$ $\vec{F} \perp \mathrm{d}\vec{r}$ $\mathrm{d}W = 0$



- 变力的功 $\mathrm{d}W = \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r}$

$$W = \int_A^B \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r} = \int_A^B F\cos\theta\mathrm{d}r$$



- 合力的功 = 分力的功的代数和

$$W = \int\sum\vec{F}_i\cdot\mathrm{d}\vec{r} = \sum\int\vec{F}_i\cdot\mathrm{d}\vec{r} = \sum_i W_i$$

$$\begin{cases}\vec{F} = F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k}\\ \mathrm{d}\vec{r} = \mathrm{d}x\vec{i} + \mathrm{d}y\vec{j} + \mathrm{d}z\vec{k}\end{cases}$$

$$W = \int F_x\mathrm{d}x + \int F_y\mathrm{d}y + \int F_z\mathrm{d}z$$

$$W = W_x + W_y + W_z$$

- 功的大小与参照系有关
- 功的单位 $1\mathrm{J} = 1\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}$
- 功率：单位时间内做的功，即做功的效率。

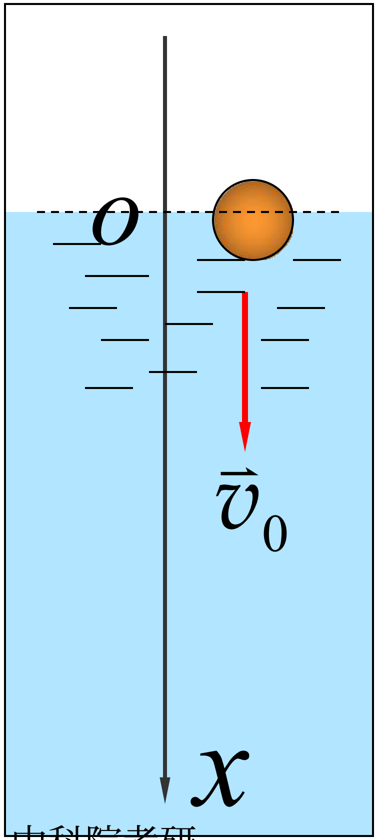
- 平均功率 $\overline{P}=\dfrac{\Delta W}{\Delta t}$

- 瞬时功率 $P=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta W}{\Delta t}=\dfrac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t}=\vec{F}\cdot\vec{v}$

$$P=Fv\cos\theta$$

- 功率的单位（瓦特）$1\mathrm{W}=1\mathrm{J}\cdot\mathrm{s}^{-1}$ $1\mathrm{kW}=10^{3}\,\mathrm{W}$

例 1 一质量为 m 的小球竖直落入水中，刚接触水面时其速率为v_0. 设此球在水中所受的浮力与重力相等, 水的阻力为 $F_r = -bv$, b 为一常量. 求阻力对球作的功与时间的函数关系 .



解 如图建立坐标轴

$$W = \int \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \int -bv\,\mathrm{d}x = -\int bv\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t$$

即
$$W = -b\int v^2\,\mathrm{d}t$$

又由 2 - 5 节例 5 知
$$v = v_0\,\mathrm{e}^{-\frac{b}{m}t}$$

$$\therefore W = -bv_0^2\int_0^t \mathrm{e}^{-\frac{2b}{m}t}\,\mathrm{d}t$$

$$W = \frac{1}{2}mv_0^2(\mathrm{e}^{-\frac{2b}{m}t} - 1)$$

二 质点的动能定理

$$W=\int \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{r}=\int F_{\mathrm{t}}|\mathrm{d}\vec{r}|=\int F_{\mathrm{t}}\mathrm{d}s \qquad F_{\mathrm{t}}=m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

$$W=\int_{v_1}^{v_2} m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}s=\int_{v_1}^{v_2} mv\mathrm{d}v=\frac{1}{2}mv_2^2-\frac{1}{2}mv_1^2$$

- 动能（状态函数）

$$\boxed{E_{\mathrm{k}}=\frac{1}{2}mv^2=\frac{p^2}{2m}}$$

◆ 动能定理

合外力对质点所作的功，等于质点动能的增量．

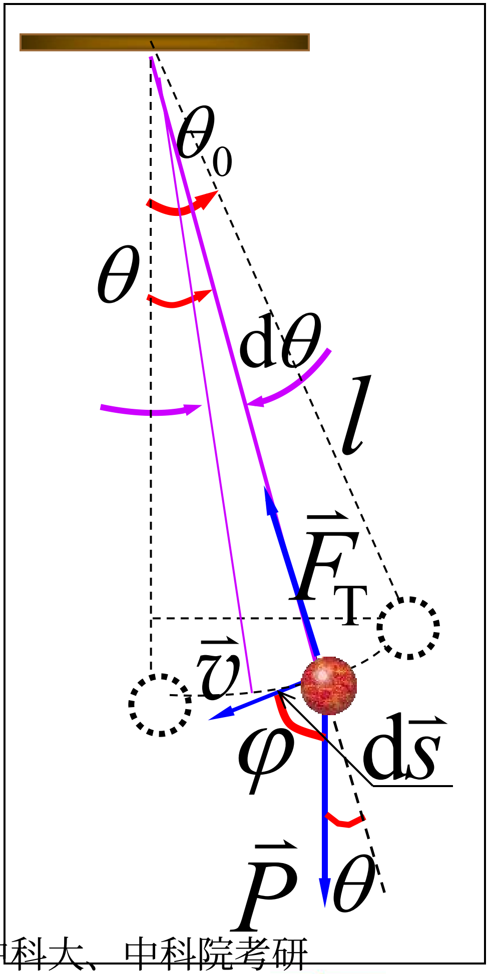
$$W=E_{k2}-E_{k1}$$

注意

功和动能都与参考系有关；动能定理仅适用于惯性系．

只有力在运动方向的分量才能改变物体的动能

例 2 一质量为1.0kg 的小球系在长为1.0m 细绳下端，绳的上端固定在天花板上．起初把绳子放在与竖直线成 30° 角处，然后放手使小球沿圆弧下落．试求绳与竖直线成 10° 角时小球的速率．



解 $$\mathrm{d}W=\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{s}=\vec{F}_{\mathrm{T}}\cdot\mathrm{d}\vec{s}+\vec{P}\cdot\mathrm{d}\vec{s}$$

$$=\vec{P}\cdot\mathrm{d}\vec{s}=-mgl\,\mathrm{d}\theta\cos\varphi$$

$$=-mgl\sin\theta\,\mathrm{d}\theta$$

$$W=-mgl\int_{\theta_0}^{\theta}\sin\theta\,\mathrm{d}\theta$$

$$=mgl(\cos\theta-\cos\theta_0)$$

$$m = 1.0\mathrm{kg} \qquad l = 1.0\mathrm{m}$$

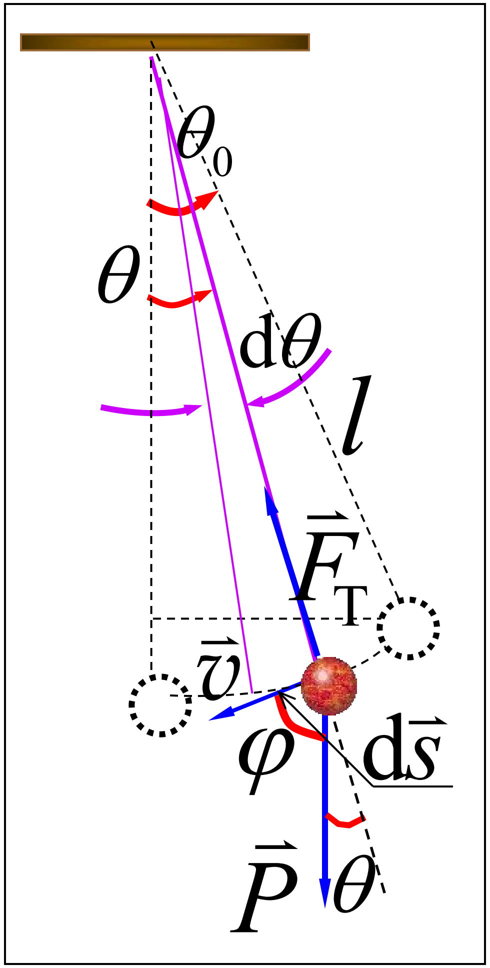
$$\theta_0 = 30^\circ \qquad \theta = 10^\circ$$

$$W = mgl(\cos\theta - \cos\theta_0)$$

由动能定理 $W = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2$

得 $v = \sqrt{2gl(\cos\theta - \cos\theta_0)}$

$$= 1.53\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$$



非惯性系与惯性力

non-inertial reference frame

（1）惯性系：牛顿运动定律成立的参考系.

研究地面上物体运动，地面通常可认为是惯性系，相对于地面作匀速直线运动的参考系也是惯性系.

（2）非惯性系：牛顿运动定律不成立的参考系.

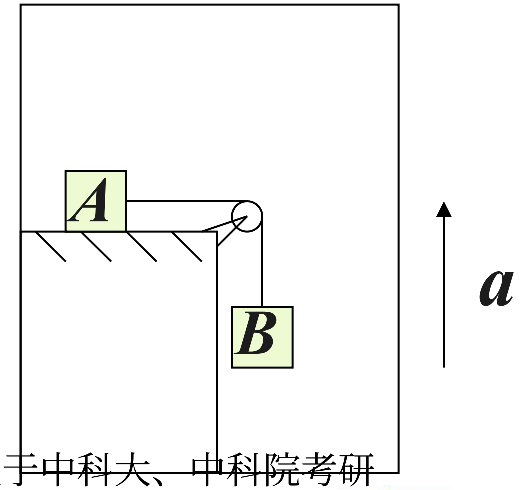
在加速度为 $\vec{a}$ 的非惯性系中引入一个力，使物体的受力满足牛顿运动定律，这个力就是惯性力。

1. 找不到相应的施力物体；

2. 大小为 $\vec{F}_{惯} = -m\vec{a}$

例题

系统处于$a=g/2$加速上升的电梯内，设A，B物体的质量同为m，A放在水平桌面上，绳子和定滑轮的质量不计，A与桌面的摩擦系数为μ，若物体A在桌面上加速运动，则绳子的张力为__________。



$$T=\frac{3}{4}(1+\mu)mg$$