

中国科学院 2001 年数学分析真题解析

一.(16 分)

(1) 已知 $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{c}{x}} = \int_{-\infty}^c te' dt$ ，求 c 。

(2) 设 $x > 0$ 且 $x \neq 1$ ，则有 $\frac{\ln x}{x-1} < x^{-\frac{1}{2}}$ 。

【解答】

(1) $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{c}{x}} = \int_{-\infty}^c te' dt$ ，即 $e^c = (c-1)e^c$ ，故 $c=2$ 。

(2) 令 $f(x) = \ln x - \frac{x-1}{\sqrt{x}}$ ，因此， $f(1) = 0$ ，

$$f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2x\sqrt{x}} = -\frac{(\sqrt{x}-1)^2}{2x\sqrt{x}} < 0, \quad x \neq 0, \quad \text{故 } 0 < x < 1 \text{ 时, } f(x) > 0, \text{ 即}$$