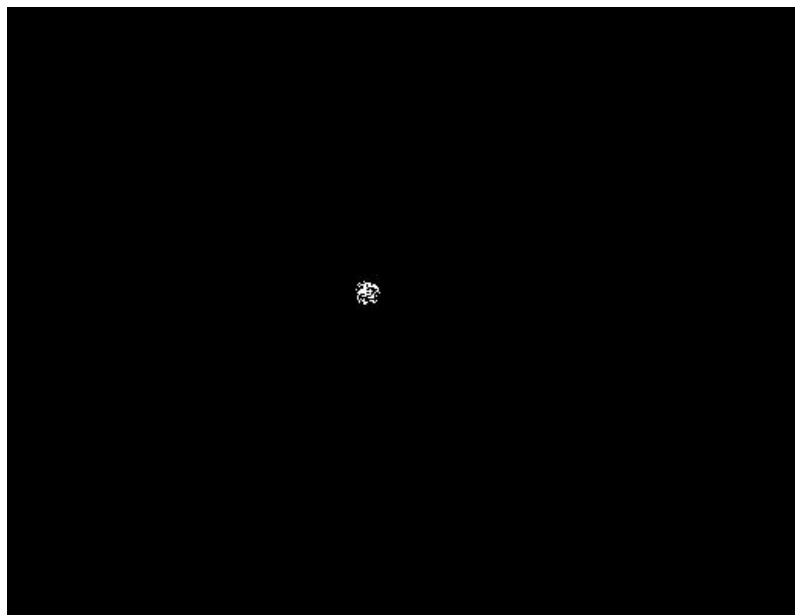


# 动量守恒定律

*law of conservation momentum*

## 质心 *Center of mass*



质心是与质点系的质量分布有关的一个代表点，  
它的位置在平均意义上代表质点系的质量分布中心。

$n$ 个质点组成的质点系的质心位置为

$$\vec{r}_C = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 + \cdots + m_n \vec{r}_n}{m_1 + m_2 + \cdots + m_n} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^n m_i} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i}{m}$$

质点系质心的直角坐标分量式为

$$x_C = \frac{\sum_{i=1}^n m_i x_i}{m}, \quad y_C = \frac{\sum_{i=1}^n m_i y_i}{m}, \quad z_C = \frac{\sum_{i=1}^n m_i z_i}{m}$$

若质量是连续分布，质心分量式为

$$x_C = \frac{\int x dm}{\int dm}, \quad y_C = \frac{\int y dm}{\int dm}, \quad z_C = \frac{\int z dm}{\int dm}$$



注意

1. 质量分布均匀、形状对称的物体，质心位于其几何中心处；
2. 外力作用线过物体质心时，物体只做平动；
3. 质心与重心的区别和联系是什么？

不受重力时，重心的概念失去意义，但物体质心依然存在

4. 质心可处于质点系或刚体的质量分布区域之外。

## 质心运动定理

由质点系动量定理的微分形式得

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_i = \frac{d}{dt} \left( \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i \right) = \sum_{i=1}^n m_i \frac{d^2}{dt^2} \left( \frac{\sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^n m_i} \right) = \sum_{i=1}^n m_i \frac{d^2}{dt^2} \vec{r}_C$$

式中  $\frac{d^2 \vec{r}_C}{dt^2} = \vec{a}_C$  为质心加速度

所以有  $\sum_{i=1}^n \vec{F}_i = m \vec{a}_C$

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_i = m \vec{a}_C$$

此式表示，质点系质心的运动与这样一个质点的运动具有相同的规律，该质点的质量等于质点系的总质量，作用于该质点的力等于作用于质点系的外力的矢量和。这个结论称为质心运动定律。

质心运动定理是确定质点系整体平动的动力学规律。

整体的运动 = 质心的平动 + 相对质心的运动

注意

1. 在  $\sum_{i=1}^n \vec{F}_i = m \vec{a}_c$  中，外力的作用线需要过质心吗？

2. 质心运动定理

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_i = m \vec{a}_c = \frac{d\vec{p}_c}{dt}$$

是

质点系动量定理

的微分形式

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{F}^{\text{ex}} dt = \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i - \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_{i0}$$

质点系动量定理  $\vec{I} = \int_{t_0}^t \sum_i \vec{F}_i^{\text{ex}} dt = \sum_i \vec{p}_i - \sum_i \vec{p}_{i0}$

## 动量守恒定律

若质点系所受的外力的矢量和为零  $\vec{F}^{\text{ex}} = \sum_i \vec{F}_i^{\text{ex}} = 0$

则系统的总动量守恒，即  $\vec{p} = \sum_i \vec{p}_i$  保持不变。

推论：若某一方向合外力为零，则此方向动量守恒。

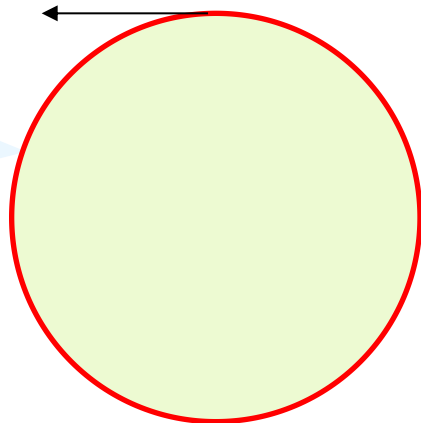
$$\left\{ \begin{array}{l} F_x^{\text{ex}} = 0, \quad p_x = \sum m_i v_{ix} = C_x \\ F_y^{\text{ex}} = 0, \quad p_y = \sum m_i v_{iy} = C_y \\ F_z^{\text{ex}} = 0, \quad p_z = \sum m_i v_{iz} = C_z \end{array} \right.$$

讨论

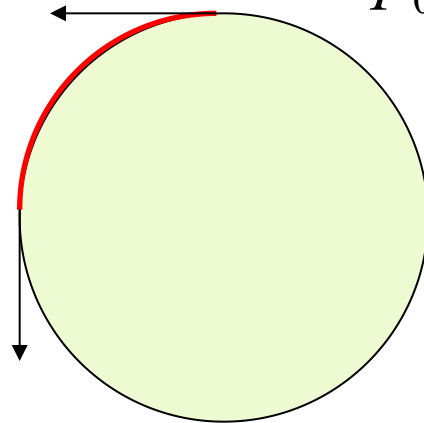
1) 瞬时性：力的瞬时作用规律

$$\vec{F}^{\text{ex}} = \frac{d\vec{p}}{dt}, \quad \vec{F}^{\text{ex}} = 0, \quad \vec{P} = \vec{C}$$

$$\vec{p}_0 = \vec{p}_{\text{末}}$$



$$\vec{p}_0 \neq \vec{p}$$



2) 守恒条件 外力的矢量和为零  $\vec{F}^{\text{ex}} = \sum_i \vec{F}_i^{\text{ex}} = 0$

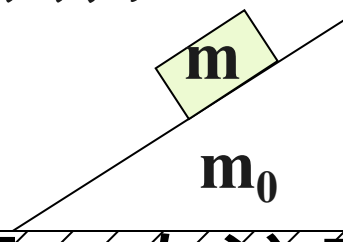
当  $\vec{F}^{\text{ex}} \ll \vec{F}^{\text{in}}$  时，可略去外力的作用，近似地认为系统动量守恒。例如在碰撞，打击，爆炸等问题中。

3) 系统的动量守恒是指系统的总动量不变，系统内任一物体的动量是可变的，各物体的动量必相对于同一惯性参考系。

4) 动量守恒定律只在惯性参考系中成立，是自然界最普遍，最基本的定律之一。

思考

1. 在地面的上空停着一气球，气球下面吊着软梯，梯上站着一个人，当这个人沿软梯上爬时，气球是否运动？
2. 如图，把 $m$ 和 $m_0$ 看成一个系统，问下列何种情况下，系统的水平方向分动量是守恒的？
  - A.  $m$ 与 $m_0$ 之间无摩擦， $m_0$ 与地面之间有摩擦；
  - ★ B.  $m$ 与 $m_0$ 之间有摩擦， $m_0$ 与地面之间无摩擦；
  - ★ C. 两处都没有摩擦；
  - D. 两处都有摩擦。

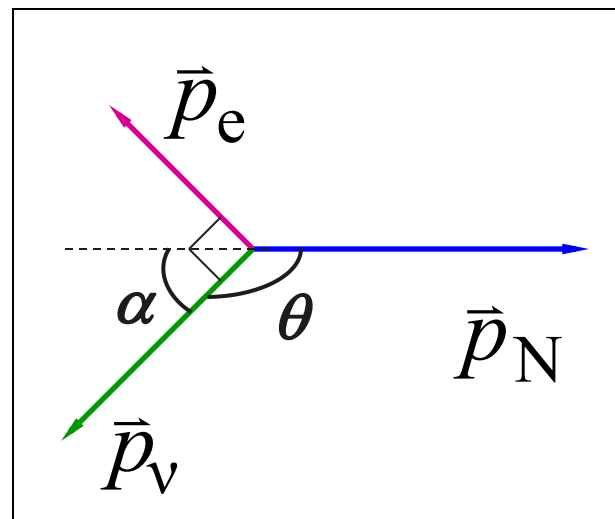


**例 1** 设有一静止的原子核,衰变辐射出一个电子和一个中微子后成为一个新的原子核. 已知电子和中微子的运动方向互相垂直,且电子动量为 $1.2 \times 10^{-22} \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ ,中微子的动量为 $6.4 \times 10^{-23} \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ . 问新的原子核的动量的值和方向如何?

**解**  $\because \sum \vec{F}_i^{\text{ex}} \ll \sum \vec{F}_i^{\text{in}}$

$$\therefore \vec{p} = \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i = \text{恒矢量}$$

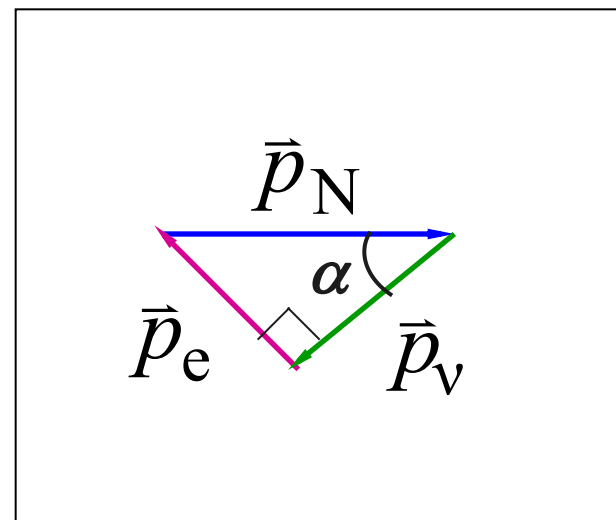
即  $\vec{p}_e + \vec{p}_\nu + \vec{p}_N = 0$



系统动量守恒，即

$$\vec{p}_e + \vec{p}_v + \vec{p}_N = 0$$

又因为  $\vec{p}_e \perp \vec{p}_v$

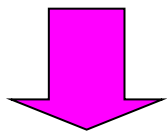


$$\therefore p_N = (p_e^2 + p_v^2)^{1/2}$$

代入数据计算得  $p_N = 1.36 \times 10^{-22} \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$

$$\alpha = \arctan \frac{p_e}{p_v} = 61.9^\circ$$

## 质心 质心的运动定律

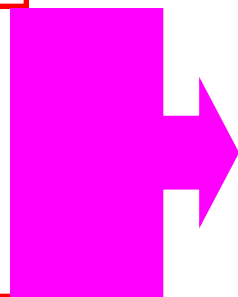


## 动量守恒定律

**理解**动量、冲量概念；

**掌握**动量定理和动量守恒定律；

**了解**完全弹性碰撞和完全非弹性碰撞的特点。



## 碰撞

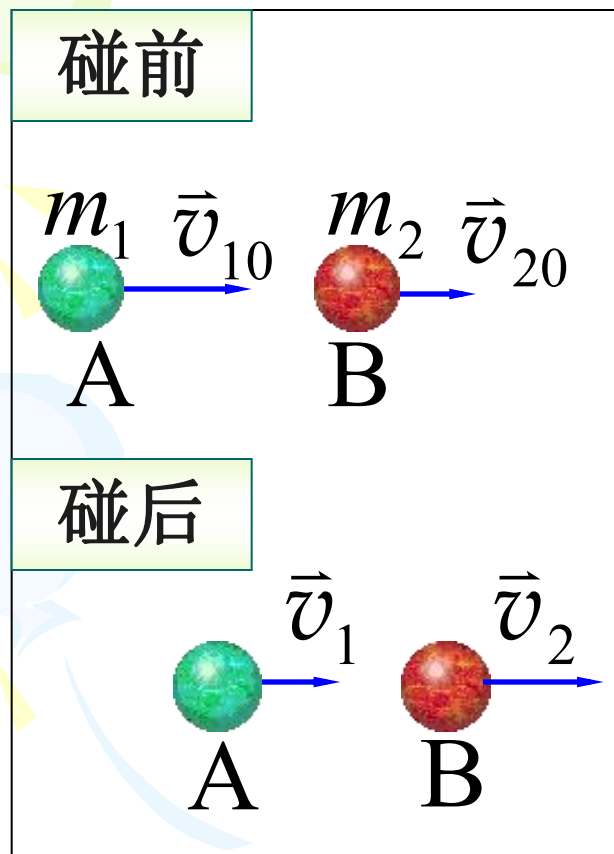
## 机械能守恒定律

**碰撞** 两物体互相接触时间极短而相互作用力较大的相互作用．  $\because \vec{F}^{\text{ex}} \ll \vec{F}^{\text{in}} \quad \therefore \sum_i \vec{p}_i = \vec{C}$

**完全弹性碰撞** 两物体碰撞之后，它们的动能之  
和不变．  $E_k = E_{k1} + E_{k2} = C$

**非弹性碰撞** 由于非保守力的作用，两物体碰撞后，使机械能转换为热能、声能，化学能等其他形式的能量．

**完全非弹性碰撞** 两物体碰撞后，以同一速度运动．



牛顿发现：碰撞后两球的分离速度与碰撞前两球的接近速度成正比，比值由两球的材料性质决定：

$$e = \left| \frac{v_2 - v_1}{v_{10} - v_{20}} \right|$$

恢复系数

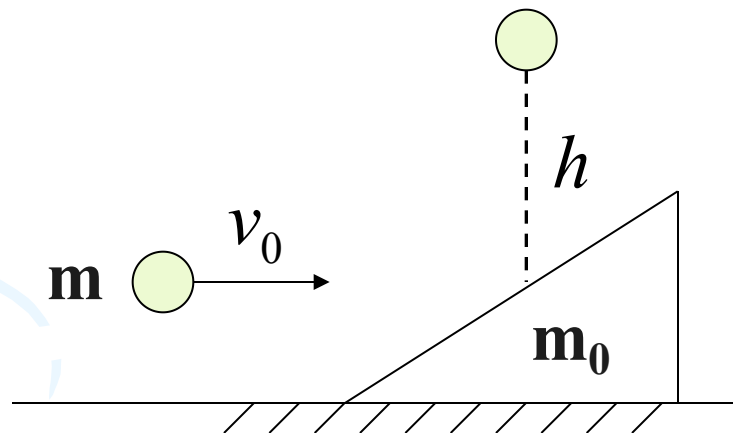
$$e = \begin{cases} 1, & \text{完全弹性碰撞} \\ (0, 1), & \text{非弹性碰撞} \\ 0, & \text{完全非弹性碰撞} \end{cases}$$

## 几种材料的恢复系数

| 材料    | 玻璃与玻璃       | 铝与铝         | 铁与铅         | 钢与软木        |
|-------|-------------|-------------|-------------|-------------|
| $e$ 值 | <i>0.93</i> | <i>0.20</i> | <i>0.12</i> | <i>0.55</i> |

例题

1. 如图，质量为 $m$ 的小球，以水平速度 $v_0$ 与在光滑桌面上的质量为 $m_0$ 的静止斜劈作完全弹性碰撞后竖直弹起，则斜劈的运动速度值 $v = \underline{\hspace{2cm}}$ ，小球上升高度 $h = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

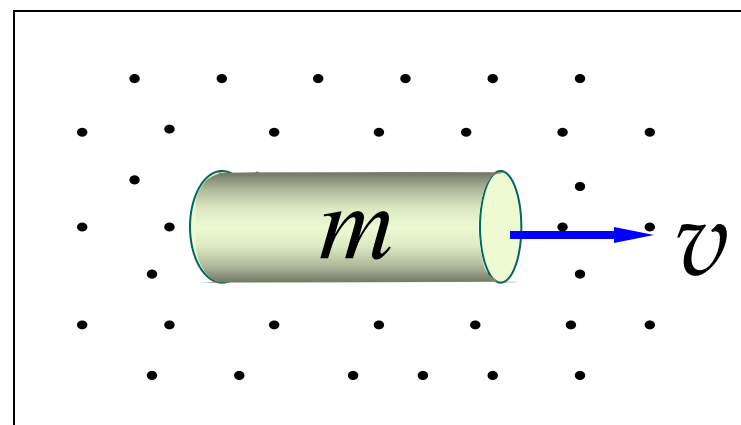


$$v = \frac{m}{m_0} v_0$$

$$h = \frac{m_0 - m}{2m_0 g} v_0^2$$

**例 2** 在宇宙中有密度为  $\rho$  的尘埃，这些尘埃相对惯性参考系是静止的．有一质量为  $m_0$  的宇宙飞船以初速  $v_0$  穿过宇宙尘埃，由于尘埃粘贴到飞船上，致使飞船的速度发生改变．求飞船的速度与其在尘埃中飞行时间的关系．(设想飞船的外形是面积为  $S$  的圆柱体)

**解** 尘埃与飞船作完全非弹性碰撞，把它们作为一个系统，则动量守恒．

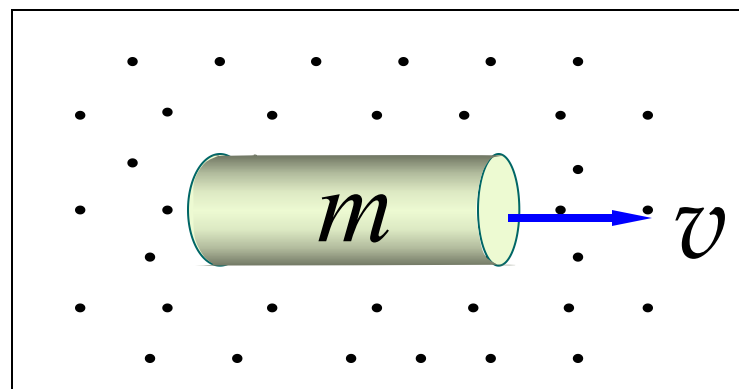


即 
$$m_0 v_0 = m v$$

得 
$$dm = -\frac{m_0 v_0}{v^2} dv = \rho S v dt$$

已知  $m_0, v_0, \rho$ .

求  $v$  与  $t$  的关系.



解 
$$dm = -\frac{m_0 v_0}{v^2} dv = \rho S v dt$$

$$-\int_{v_0}^v \frac{dv}{v^3} = \frac{\rho S}{m_0 v_0} \int_0^t dt$$

$$\therefore v = \left( \frac{m_0}{2 \rho S v_0 t + m_0} \right)^{1/2} v_0$$

