第四章　时间响应分析

（教材第4、5章）

4-1 控制系统的时域指标

4-2 一阶系统的时间响应

4-3 二阶系统的时间响应

4-4 高阶系统的时间响应

4-5 控制系统的稳态误差（教材第4章）

4-6 反馈的特性（教材第4章）

第八讲：二阶系统的时间响应

（4-3 单元，3学时）

4-3 二阶系统的时间响应

4-3 二阶系统的时间响应

一 二阶系统的数学模型

二阶系统非常重要，不仅二阶系统的应用实例多见，而且，在一定条件下，多数高阶系统可以用二阶系统来近似。比如，直流电动机，在忽略电感时，就得到了二阶系统：

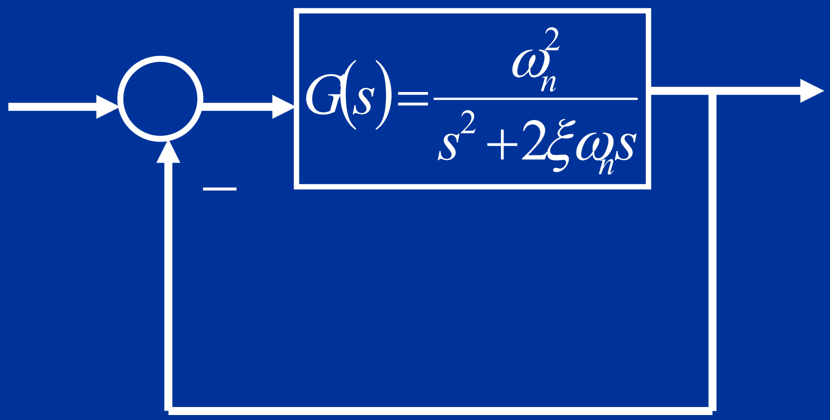
$$\frac{\theta(s)}{U_a(s)} = \frac{K_m}{s(T_m s + 1)}$$

$$G(s)=\frac{K_m/T_m}{s^2+\frac{1}{T_m}s}$$

$$\begin{cases} 2\xi\omega_n=\dfrac{1}{T_m} \\ \omega_n^2=K_m/T_m \end{cases}$$

$$G(s)=\frac{\omega_n^2}{s^2+2\xi\omega_n s}$$

二阶系统的标准框图



二阶系统的标准形式

$$\phi(s)=\frac{\omega_n^2}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2}$$

式中，ξ 为系统的阻尼比，ω_n 为无阻尼振荡频率，简称固有频率（也称自然振荡频率）。

二、 二阶系统的单位阶跃响应

1.当 $\xi > 1$ 时，是过阻尼系统。二阶系统的闭环特征方程有两个不相等的负实根，闭环传递函数可写为

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi \cdot \omega_n s + \omega_n^2}$$

$$= \frac{1/T_1T_2}{(s+1/T_1)(s+1/T_2)}$$

$$\begin{cases} -\dfrac{1}{T_1} = -\xi\omega_n + \omega_n\sqrt{\xi^2 - 1} \\ -\dfrac{1}{T_2} = -\xi\omega_n - \omega_n\sqrt{\xi^2 - 1} \end{cases}$$

当系统的输入信号为单位阶跃函数时，则系统的输出量为：

$$\frac{Y(s)}{R(s)}=\frac{1/T_1T_2}{(s+1/T_1)(s+1/T_2)}\cdot\frac{1}{s}$$

拉氏反变换得：

$$y(t)=L^{-1}[Y(s)]=1+\frac{1}{T_2/T_1-1}e^{-t/T_1}+\frac{1}{T_1/T_2-1}e^{-t/T_2}$$

2.当 $\xi=1$时，是临界阻尼系统。二阶系统的闭环特征方程具有两个相同的负实根，即：

$$\frac{1}{T_1}=\frac{1}{T_2}=\omega_n$$

而临界阻尼二阶系统的单位阶跃响应为

$$Y(s)=\frac{\omega_n^2}{\left(s+\omega_n\right)^2}\cdot\frac{1}{s}$$

$$=\frac{1}{s}-\frac{\omega_n}{\left(s+\omega_n\right)^2}-\frac{1}{s+\omega_n}$$

$$\xrightarrow{L^{-1}} \quad y(t)=1-(1+\omega_n t)e^{-\omega_n t}$$

3.当 $0<\xi<1$时,为欠阻尼情况。二阶系统的闭环特征根为

$$s_{1,2}=-\xi\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\xi^2}=-\sigma \pm j\omega_d$$

$\sigma=\xi\omega_n$ ---衰减系数

$\omega_d=\omega_n\sqrt{1-\xi^2}$ ---阻尼振荡频率

当系统输入为单位阶跃信号时，系统的输出量为

$$Y(s)=\frac{\omega_n^2}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2}\cdot\frac{1}{s}$$

即有：

$$Y(s)=\frac{1}{s}-\frac{s+\xi\omega_n}{(s+\xi\omega_n)^2+\omega_d^2}-\frac{\xi\omega_n}{(s+\xi\omega_n)^2+\omega_d^2}$$

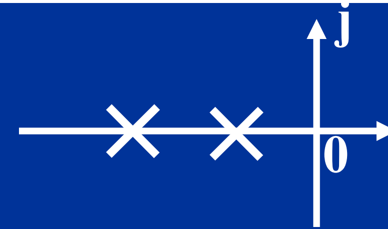
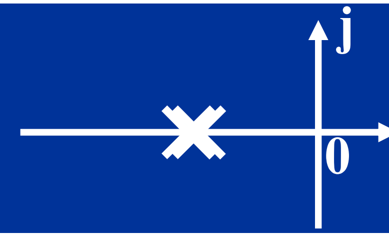
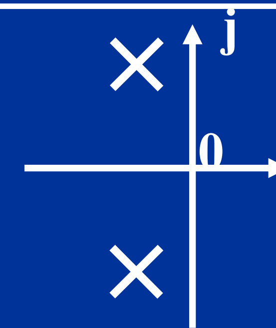
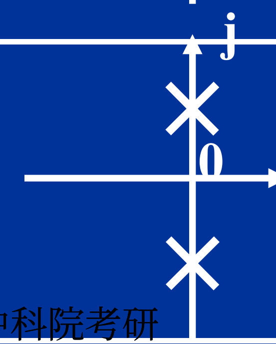
$$h(t)=1-e^{-\xi\omega_n t}(\cos\omega_d t+\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\sin\omega_d t)$$

$$=1-\frac{e^{-\xi\omega_n t}}{\sqrt{1-\xi^2}}\sin(\omega_d t+\beta)$$

$$\beta=arctg\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}\ \text{or}\ \beta=\arccos\xi$$

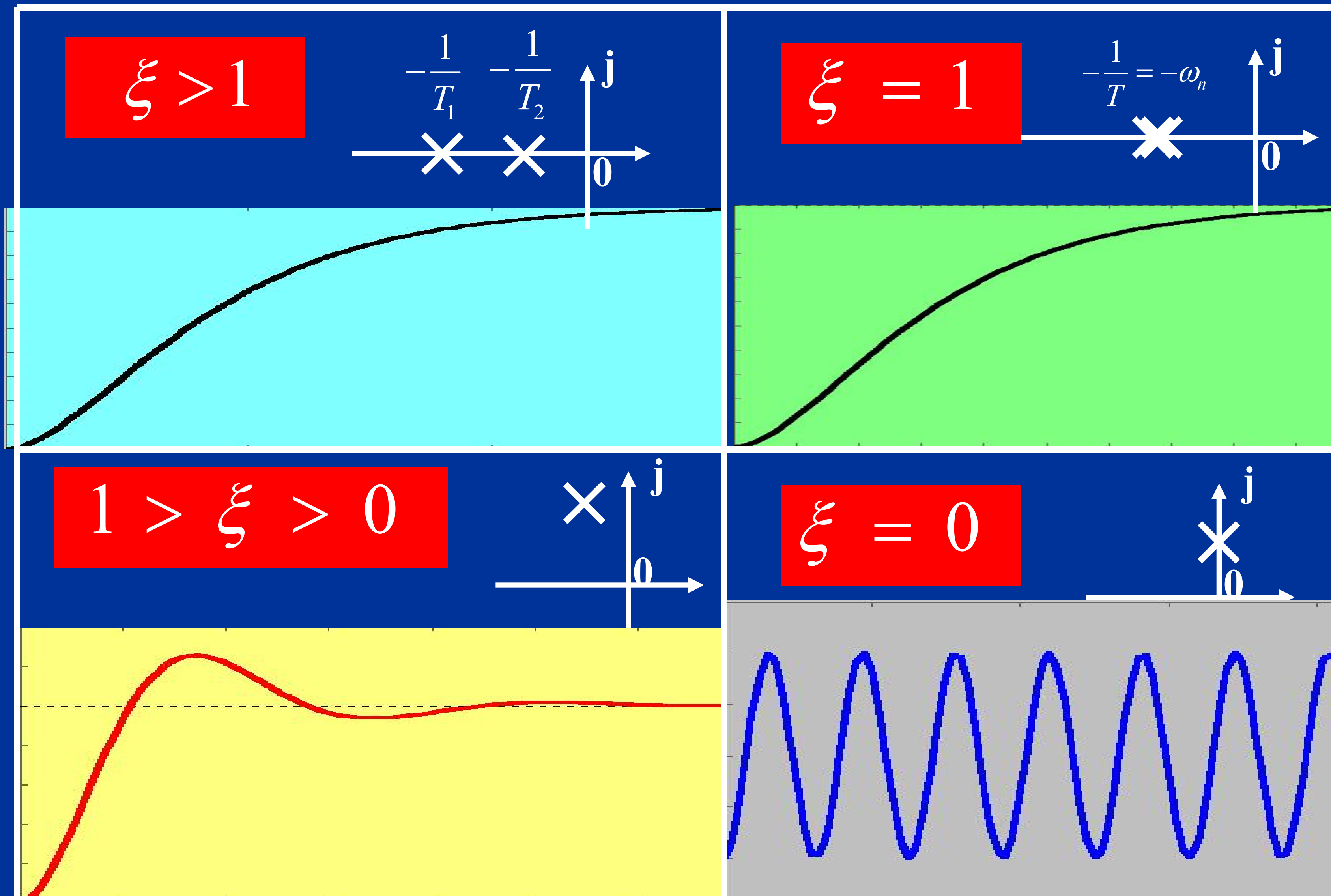
二阶系统单位阶跃响应

$$\Phi(s)=\frac{\omega_n^2}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2}$$

$\xi>1$	$s_{1,2}=-\xi\omega_n\pm\omega_n\sqrt{\xi^2-1}$	
$\xi=1$	$s_{1,2}=-\xi\omega_n=\omega_n$	
$0<\xi<1$	$s_{1,2}=-\xi\omega_n\pm j\omega_n\sqrt{1-\xi^2}$	
$\xi=0$	$s_{1,2}=\pm j\omega_n$	

二阶系统单位阶跃响应

$$\Phi(s)=\frac{\omega_n^2}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2}$$



［基本结论］

在 $0<\xi<1$ 的情况下，ξ 越大，超调量 $\sigma\%$ 越小，响应的振荡性越弱，平稳性越好；反之，ξ 越小，振荡性越强，平稳性越差。

ξ 过大，比如，$\xi>1$，则系统响应迟缓，调节时间 t_s 长，快速性差；若 ξ 过小，虽然响应的起始速度较快，t_p 和 t_r 小，但振荡强烈，响应曲线衰减缓慢，调节时间 t_s 亦长。

我们再来看一下二阶系统对单位脉冲激励的响应。

运动模态1

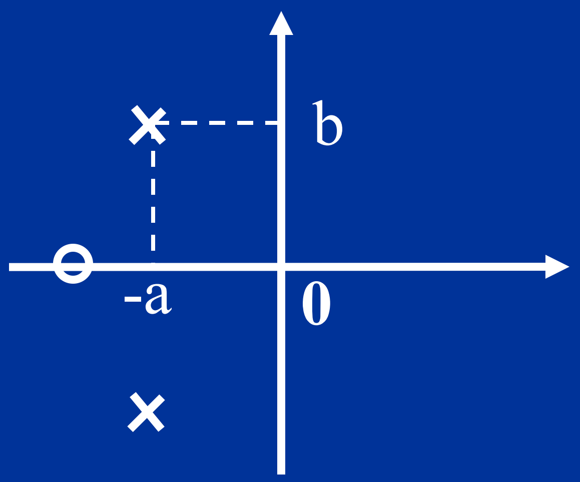
传递函数

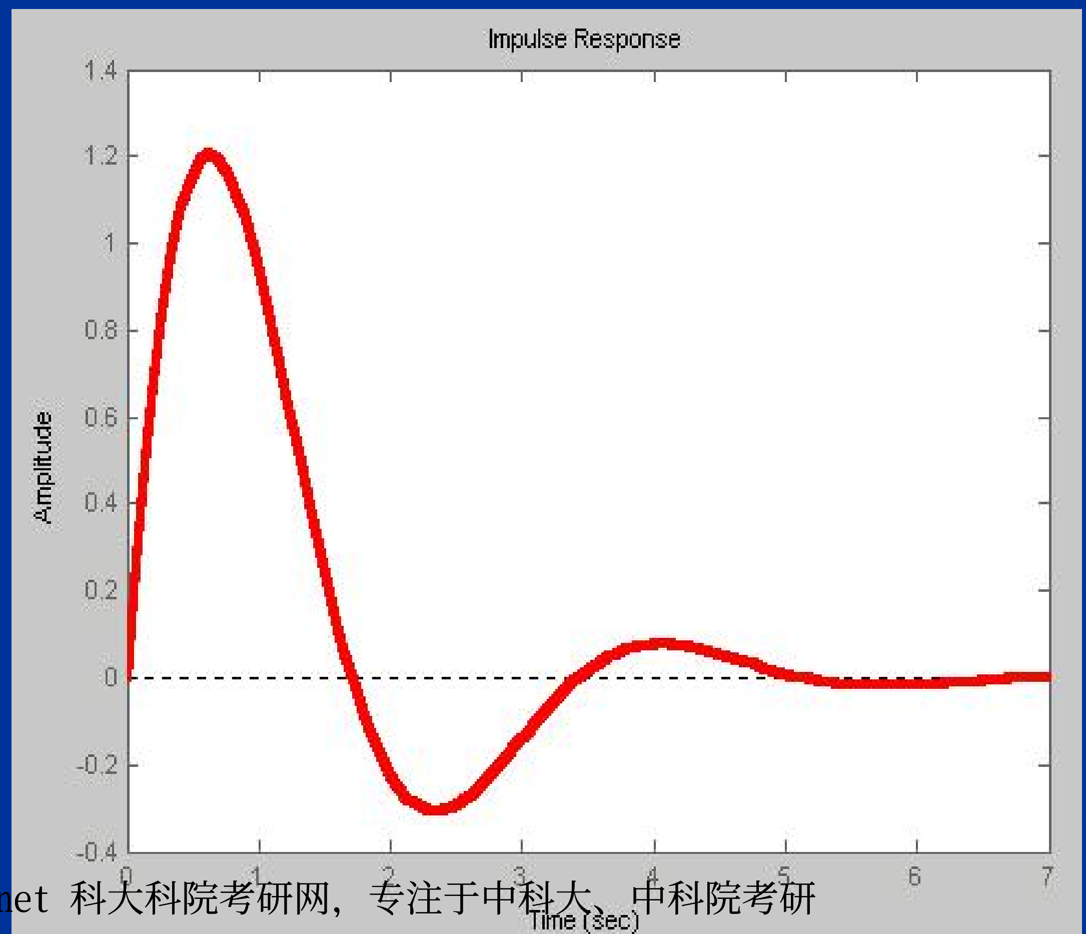
$$\Phi(s)=\frac{A_1 s+B_1}{(s+a)^2+b^2}$$

脉冲响应

$$y(t)=Ae^{-at}\sin(bt+\alpha)$$

零极点分布图



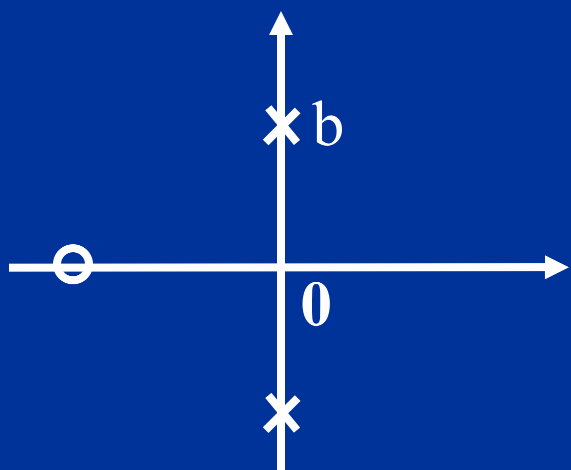


运动模态2

传递函数

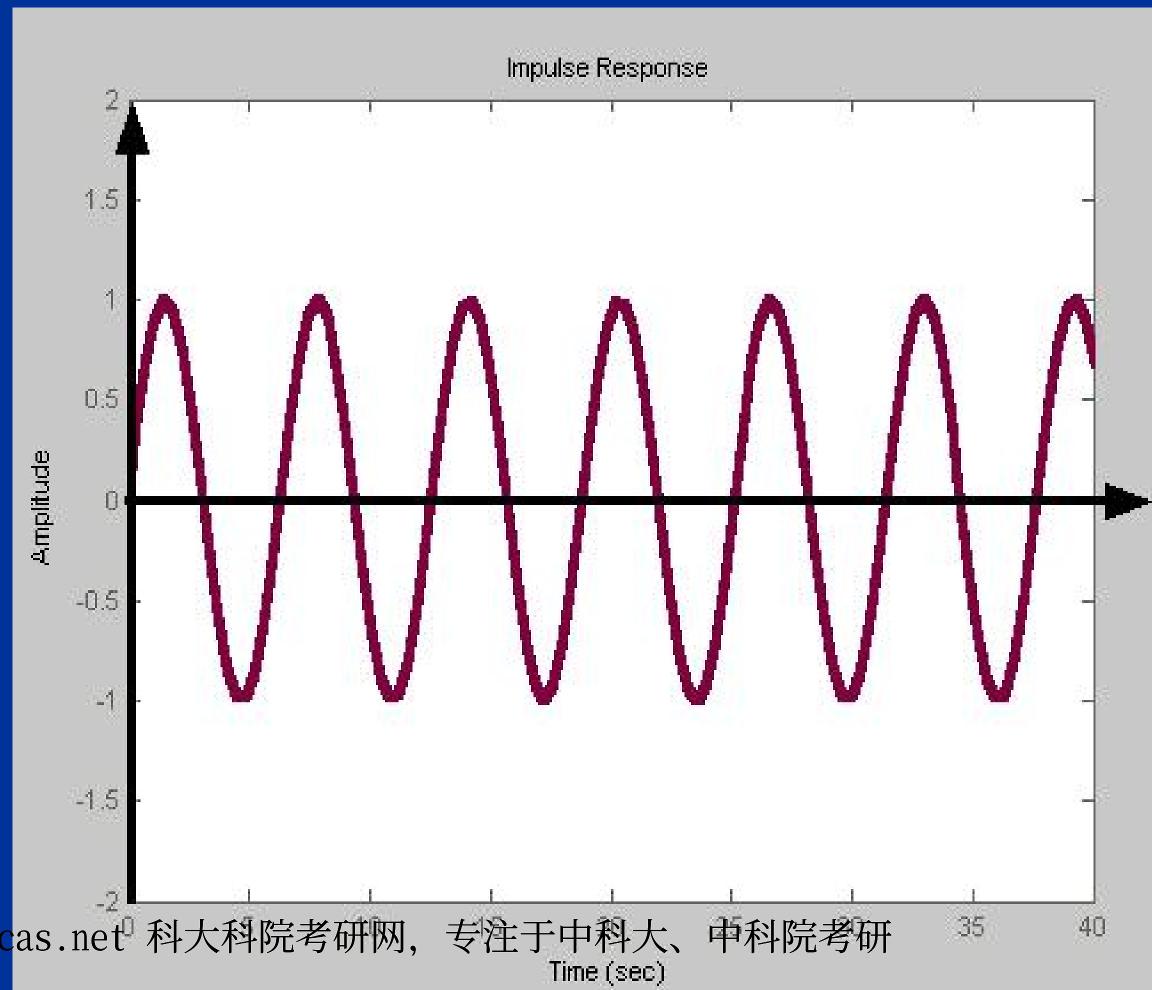
$$\Phi(s)=\frac{A_1 s+B_1}{s^2+b^2}$$

零极点分布图



脉冲响应

$$y(t)=A\sin(bt+\alpha)$$

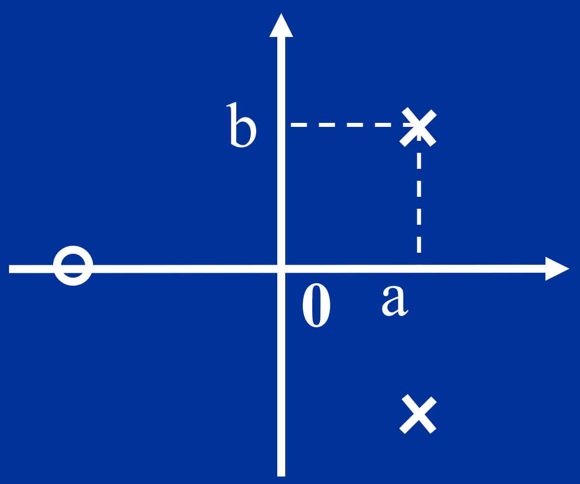


运动模态3

传递函数

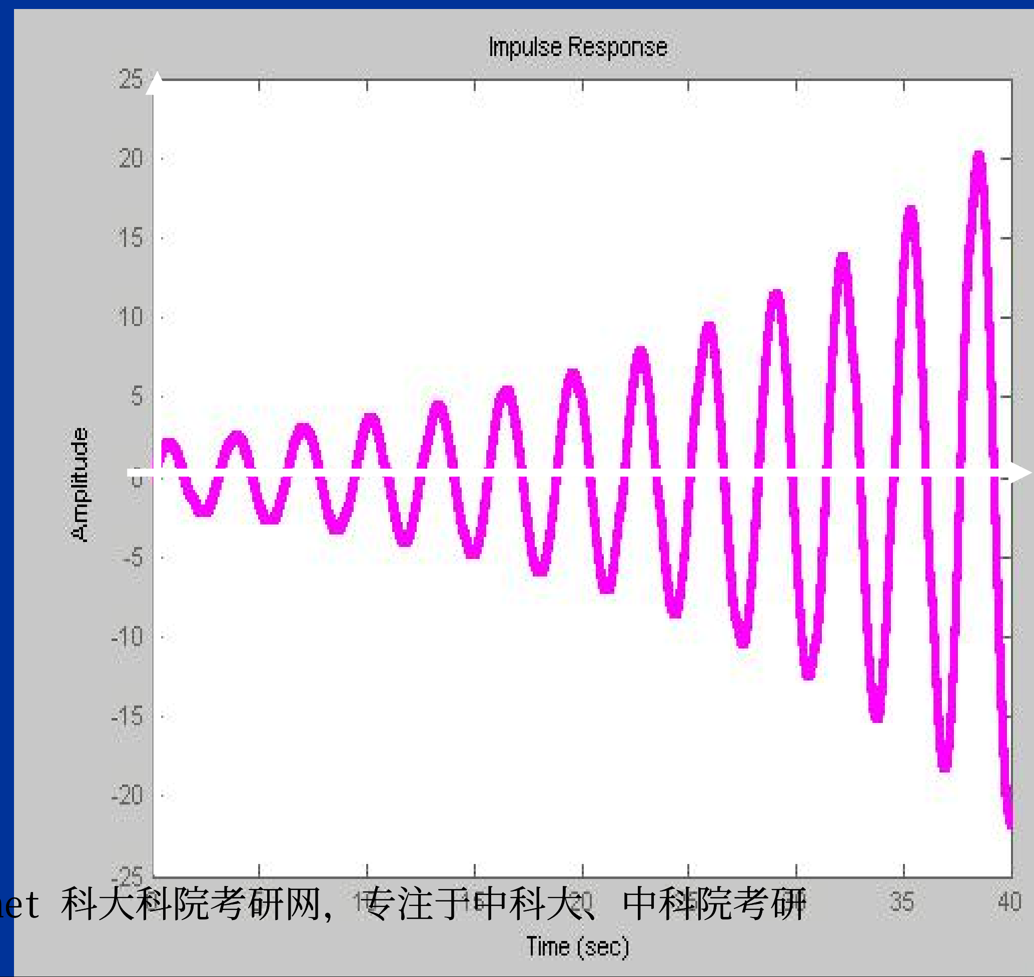
$$\Phi(s)=\frac{A_1 s+B_1}{(s-a)^2+b^2}$$

零极点分布图



传递函数

$$y(t)=Ae^{at}\sin(bt+\alpha)$$



三（欠阻尼）二阶系统性能指标计算

1. 上升时间 t_r

$$y(t_r)=1,\ \text{thus},\ 1-\frac{e^{-\xi\omega_n t_r}}{\sqrt{1-\xi^2}}\cdot\sin(\omega_d t_r+\beta)=1$$

$$\therefore\ \frac{e^{-\xi\omega_n t_r}}{\sqrt{1-\xi^2}}\cdot\sin(\omega_d t_r+\beta)=0$$

$$\because\ \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}}\neq 0,\ e^{-\xi\cdot\omega_n\cdot t_r}\neq 0,$$

$$\therefore\ \omega_d t_r+\beta=n\pi\,(n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$$

由定义知：t_r 为输出响应第一次到达稳态值所需时间，所以应取**n=1**。

$$\therefore\ t_r=\frac{\pi-\beta}{\omega_d}=\frac{\pi-\beta}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}}$$

当ω_n一定时，ξ越小，t_r越小；
当ξ一定时，ω_n越大，t_r越小。

2.峰值时间 t_p

$$y(t)=1-\frac{e^{-\xi\cdot\omega_n\cdot t}}{\sqrt{1-\xi^2}}\sin(\omega_d t+\beta)$$

对上式两边求导，并令其等于0，得：

$$y'(t)=\xi\omega_n e^{-\xi\cdot\omega_n\cdot t}(\cos\omega_d t+\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\sin\omega_d t)$$

$$-\omega_d e^{-\xi\cdot\omega_n\cdot t}(-\sin\omega_d t+\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\cos\omega_d t)$$

代入 $\omega_d=\omega_n\sqrt{1-\xi^2}$

$$y'(t)=\xi\omega_n e^{-\xi\cdot\omega_n\cdot t}\cos_d t+\frac{\xi^2\omega_n}{\sqrt{1-\xi^2}}e^{-\xi\cdot\omega_n\cdot t}\sin\omega_d t$$

$$+\omega_n\sqrt{1-\xi^2}e^{-\xi\cdot\omega_n\cdot t}\sin\omega_d t-\frac{\xi\omega_n\sqrt{1-\xi^2}}{\sqrt{1-\xi^2}}e^{-\xi\cdot\omega_n\cdot t}\cos\omega_d t$$

$$y'(t)=\left(\frac{\xi^2\omega_n}{\sqrt{1-\xi^2}}+\omega_n\sqrt{1-\xi^2}\right)e^{-\xi\cdot\omega_n\cdot t}\sin\omega_d t$$

$$=\frac{\omega_n}{\sqrt{1-\xi^2}}e^{-\xi\cdot\omega_n\cdot t}\sin\omega_d t=0$$

$$\therefore \sin\omega_d t_p=0,\omega_d t_p=n\pi(n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$$

按 t_p 的定义，应取**n=1**。

$$\omega_d t_p=\pi,\therefore t_p=\frac{\pi}{\omega_d}=\frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}}$$

当 ω_n 一定时，ξ 越小，t_p 越小；

当 ξ 一定时，ω_n 越大，t_p 越小。

t_p 与 t_r 有类似的表现。

3. 超调量 $\sigma\%$

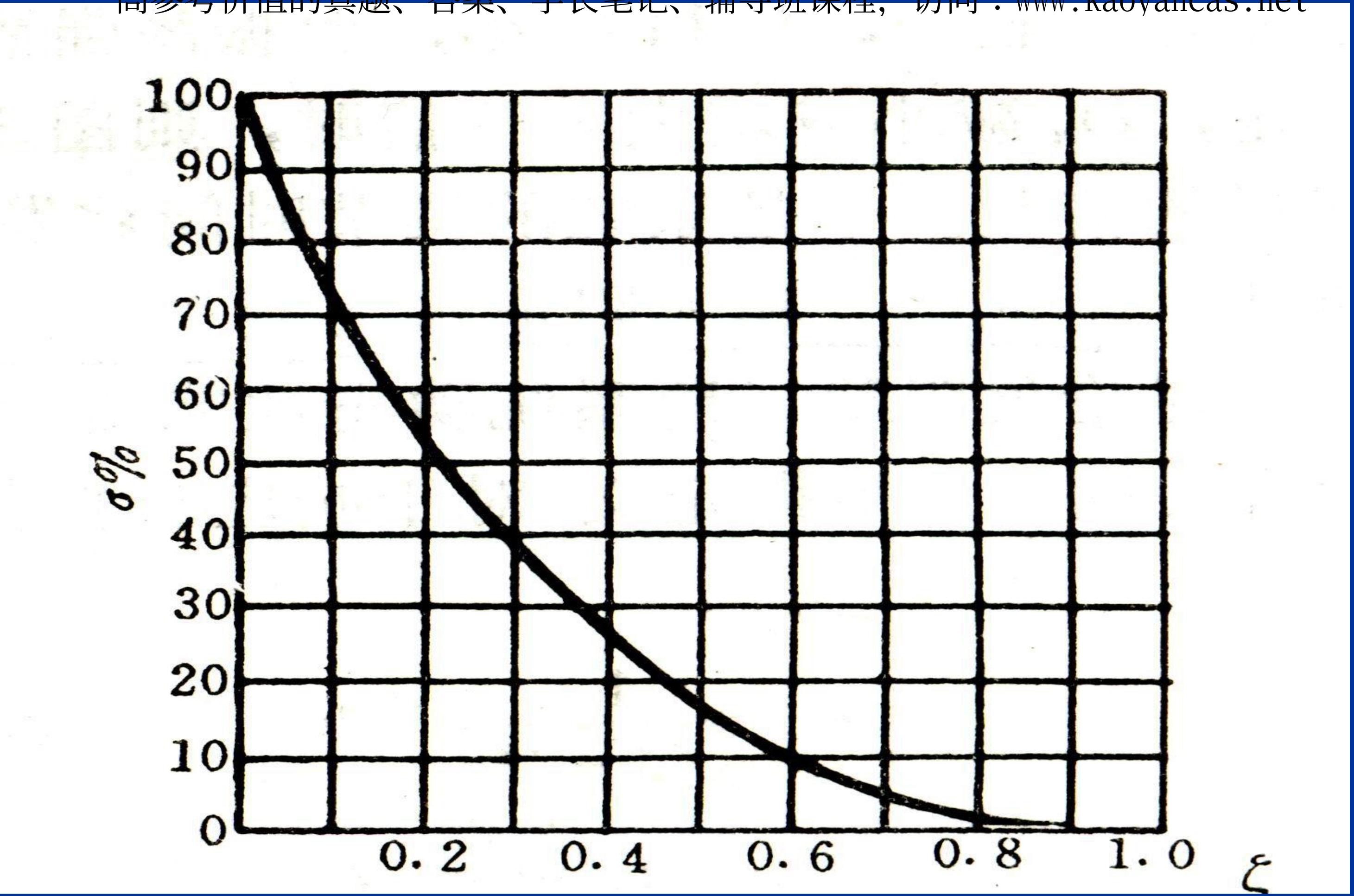
$$y(t_p)=1-\frac{e^{-\xi\omega_n t_p}}{\sqrt{1-\xi^2}}\sin(\pi+\beta)$$

$$\therefore \sin(\pi+\beta)=-\sin\beta=-\sqrt{1-\xi^2}$$

$$t_p=\frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}}$$

$$\therefore y(t_p)=1+e^{-\pi\xi/\sqrt{1-\xi^2}},\ \text{let}\ y(\infty)=1$$

$$thus\ \ \sigma\%=\frac{y(t_p)-y(\infty)}{y(\infty)}\times 100\%=e^{-\pi\xi/\sqrt{1-\xi^2}}\cdot 100\%$$



$\sigma\%$与ξ的关系曲线

ξ 增大，$\sigma\%$减小。通常，为了获得良好的平稳性和快速性，阻尼比 ξ 取在0.4-0.8 之间，相应的超调量约为 25%-2.5%

4. 调节时间 t_s

根据定义：

$$\left|\frac{e^{-\xi\cdot\omega_n\cdot t}}{\sqrt{1-\xi^2}}\cdot\sin(\sqrt{1-\xi^2}\cdot\omega_n t_s+\beta)\right|\le 0.05 \text{ or } 0.02$$

令：

$$\frac{e^{-\xi\cdot\omega_n t_s}}{\sqrt{1-\xi^2}}=\Delta \Rightarrow t_s=\frac{1}{\xi\cdot\omega_n}\ln\left(\frac{1}{\Delta\sqrt{1-\xi^2}}\right)$$

$$t_s\approx\frac{3}{\xi\cdot\omega_n}(\Delta=5\%) \text{ or } t_s\approx\frac{4}{\xi\cdot\omega_n}(\Delta=2\%)$$

在设计系统时，ξ 通常由要求的最大超调量决定，而调节时间则由无阻尼振荡频率 ω_n 来决定。

5. 振荡次数N

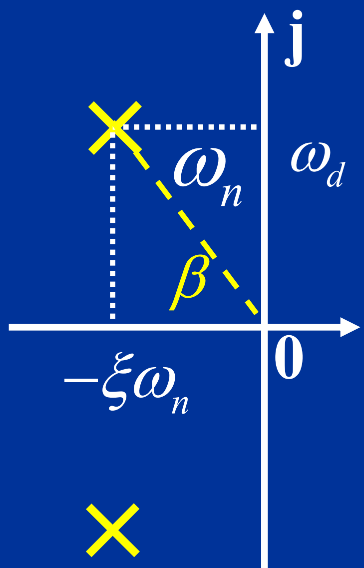
N的定义: 在调节时间内,响应曲线穿越其稳态值次数的一半。

$$N = \frac{t_s}{T_d}$$

$$T_d = \frac{2\pi}{\omega_d} = \frac{2\pi}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}}$$

其中，T_d为阻尼振荡的周期。

欠阻尼二阶系统动态性能分析与计算
------参数及其相互关系



$$\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\xi^2}$$

$$\Phi(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

$$s_{1,2} = -\xi\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\xi^2}$$

$$\beta = arctg\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi} \text{ or } \beta = \arccos\xi$$

$$y(t) = 1 - \frac{e^{-\xi\cdot\omega_n\cdot t}}{\sqrt{1-\xi^2}}\sin(\omega_d t + \beta)$$

欠阻尼二阶系统动态性能分析与计算
-------性能指标计算

$$y(t)=1-\frac{e^{-\xi\cdot\omega_n\cdot t}}{\sqrt{1-\xi^2}}\sin(\omega_d t+\beta)$$

令**h(t)=1**，并取其解的最小值，得到： $t_r=\dfrac{\pi-\beta}{\omega_d}$

令**h(t)**一阶导数**=0**，并取其解的最小值，得： $t_p=\dfrac{\pi}{\omega_d}=\dfrac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}}$

由峰值相对偏差，得到： $\sigma\%=e^{-\pi\xi/\sqrt{1-\xi^2}}\cdot 100\%$

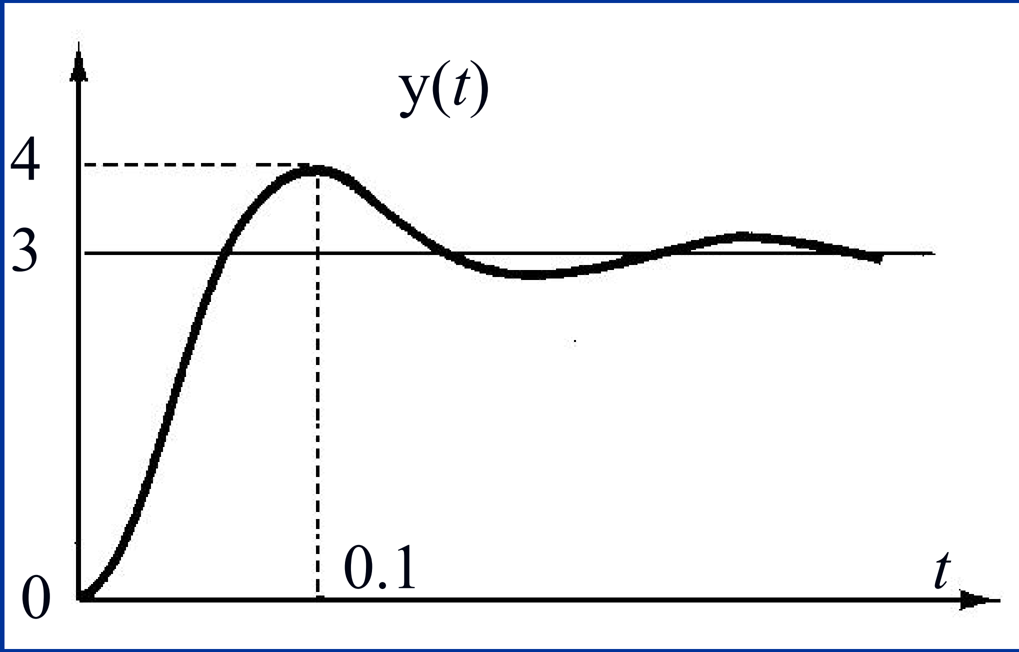
由包络线求调节时间，得到： $t_s\approx\dfrac{3\sim4}{\xi\cdot\omega_n}$

[基本结论]

在 $0<\xi<1$ 的情况下，ξ 越大，超调量 $\sigma\%$ 越小，响应的振荡性越弱，平稳性越好；反之，ξ 越小，振荡性越强，平稳性越差。

ξ 过大，比如，$\xi>1$，则系统响应迟缓，调节时间 t_s 长，快速性差；若 ξ 过小，虽然响应的起始速度较快，t_p 和 t_r 小，但振荡强烈，响应曲线衰减缓慢，调节时间 t_s 亦长。

例4.3 欠阻尼二阶控制系统的单位阶跃响应曲线所示。试确定系统的传递函数。



解 可以明显看出，在单位阶跃作用下，响应的稳态值为3，而不是1。系统模型应该为

$$\phi(s)=\frac{3\omega_n^2}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2}$$

可以读出系统的超调量和峰值时间为：

$$\sigma\% = \frac{h(t_p) - h(\infty)}{h(\infty)} = \frac{4-3}{3} = 33\%$$

$$t_p = 0.1$$

由性能指标公式得

$$\sigma\% = e^{-\pi\xi/\sqrt{1-\xi^2}} = 33\%$$

于是先有 $\xi = 0.33$

再者 $t_p = \dfrac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}} = 0.1$

得到模型参数 $\omega_n = 33.2$

习题

E5.8, E5.9, E5.11, E5.14, E5.16, P5.4, P5.8 , MP5.1, MP5.3