

数字信号处理基础 (01114301)

第2章 模数转换和数模转换

中国科学技术大学 曾凡平

billzeng@ustc.edu.cn

本章内容

■ 现实中大多数信号都是模拟信号，而数字信号更适合计算机处理。本章研究模拟信号转换为数字信号的步骤，也将讨论如何把处理过的数字信号还原为模拟信号。本章内容包括：

1. 介绍完整**DSP**系统的组成
2. 介绍模数转换中采样的重要组件
3. 定义信号的最小采样率
4. 讨论较慢采样的影响
5. 介绍较快采样的好处
6. 解释模数转换中量化的必要性
7. 计算量化引起的误差
8. 说明模数转换的步骤
9. 说明数模转换的步骤

2.1 简单的DSP系统

- 数字信号处理实质上是**数字信号的变换**。可计数的信号(如一年内的雨天)可直接用数字信号表示。
- 通过人们感官感觉到的所有信号都是**模拟信号**，不论语音、音乐或图像。
- 这些模拟信号在进行处理之前，都必须转换为数字信号。遗憾的是这种转换绝非理想，而且**数字信号并不能完全代表相应的模拟信号**。

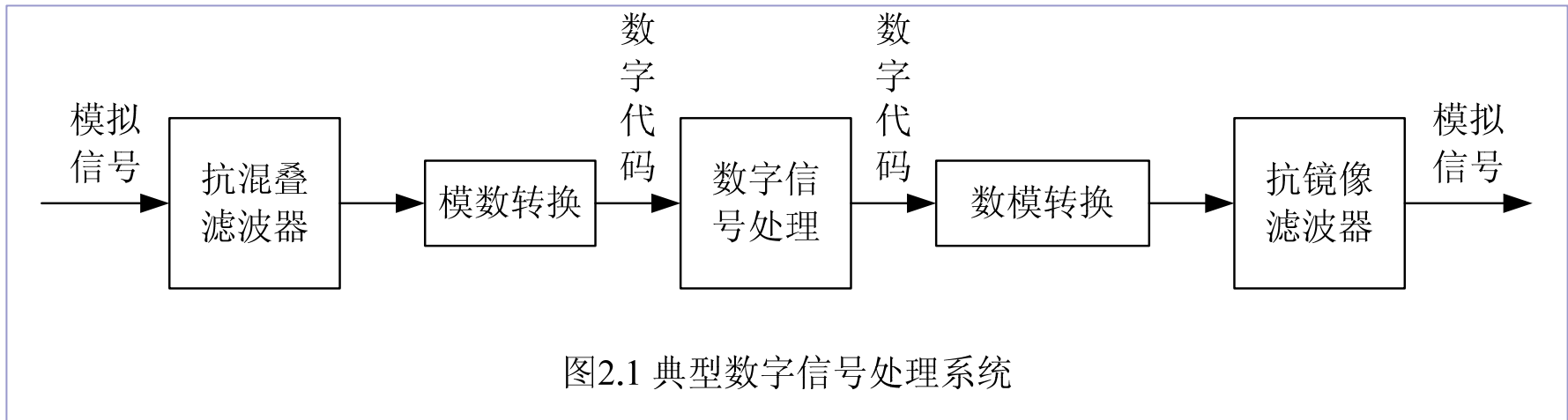
2.1 简单的DSP系统(2)

- 一旦找到非常接近模拟信号的数字信号，就可进行数字信号处理。
- 例如，可以滤除语音中的高频噪声、加重音乐中的低频、突出图像中的边缘等。
- 由于数字信号不能在模拟的世界中存在，所以处理过的数字信号在处理过程结束时，还必须再转换成模拟信号。

2.1 简单的DSP系统(3)

■ 简单的DSP系统如图所示（图2.1）它由五大组成部分构成：

- ① 抗混叠滤波器：滤除不满足采样定理的信号，通常是(模拟)低通滤波器。
- ② 模拟数字转换：模拟信号→数字信号
- ③ 数字信号处理：对信号进行转换(变换)
- ④ 数模转换：数字信号→模拟信号
- ⑤ 抗镜像滤波器：滤除信号中的附加频率(平滑信号)，通常是(模拟)低通滤波器。



2.1 简单的DSP系统(4)

■ DSP系统的工作过程

在DSP处理器（定时器）的作用下，**定时**

1. 将**输入**的模拟信号转换为数字信号，
 2. 用某个算法对输入的数字信号进行**处理**，
 3. 将处理后的数字信号转换为模拟信号并**输出**。
- 这三个方面的工作都必须在一个周期内尽可能快地完成。

2.2 采样

- 从模拟信号到数字信号的第一个过程是采样，**采样事实上是从模拟信号的无限个数据中抽取数据的一部分**。其目的是减少要处理的数据量，把要处理的数据减少到数字信号处理器可以处理的程度。
- 采样是以一定的时间间隔进行的，这个时间间隔称**采样周期 T_s** 。

2.2.1 奈奎斯特采样理论

- 采样周期(**sampling period**)：相邻采样点之间的时间间隔（秒） T_s ，与其对应的为采样频率 **f_s** (**sampling frequency**)，表示每秒的采样点数（赫兹**Hz**）。

$$\text{采样频率 } f_s = \frac{1}{\text{采样周期 } T_s} \quad f_s = \frac{1}{T_s}$$

采样过程图解

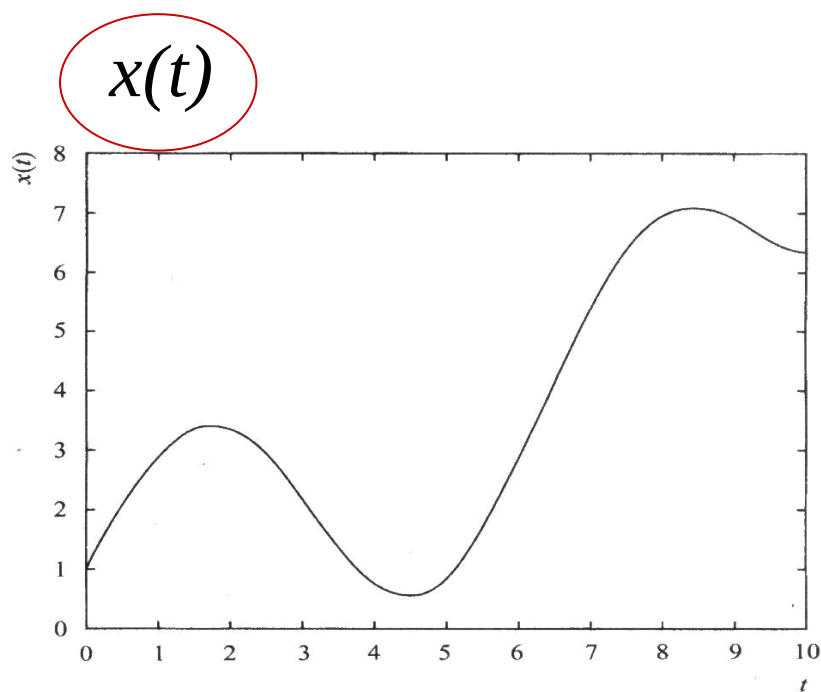


图 2.2 模拟信号

采样保持

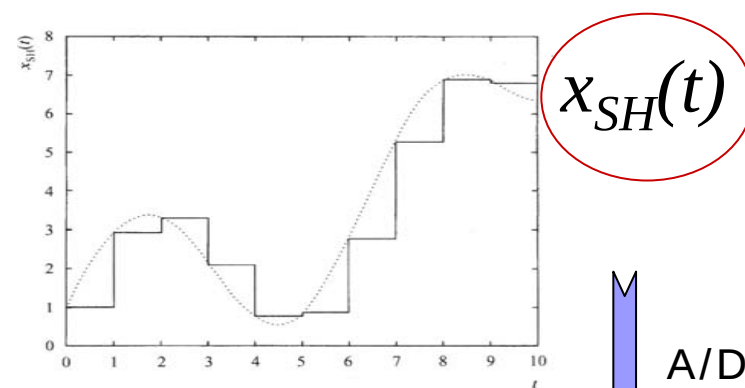
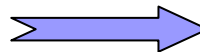


图 2.3 采样保持信号(连同模拟信号)

A/D

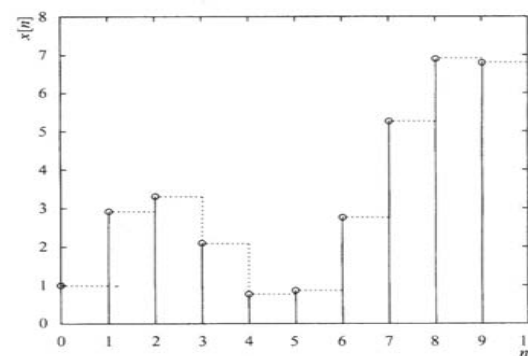
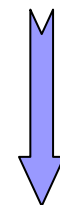


图 2.4 数字信号(连同采样保持信号)

采样过程说明

- 图2.2表示了模拟信号的例子，此信号表示为 $x(t)$ (t 表示时间)，该记号表示在每个时刻都有值。
- 图2.3是与模拟信号相对应的采样保持信号。这里，每个采样值都是模拟信号以固定的采样间隔进行采样得到的。与图1.6相比，图2.3假设每次的采集时间可忽略不计。
- 如果假设量化误差也可忽略不计，则由采样保持信号得到的数字信号如图2.4所示。数字信号表示为 $x[n]$ ， n 是采样时刻，表示数字信号的值仅在每个采样点上，而不在采样点之间。
- 图2.4中，每个采样点的**数字信号值都用竖线上加小圆圈表示**。原模拟信号和对应的采样数字信号都给出了信号的时间信息。因此，它们都是**时域描述：表示信号随时间的变化**。

采样信号能否代表真实的原模拟信号？

- 因为采样后进行处理信号只是原模拟信号的一部分，**采样信号是否能代表真实的原模拟信号**就成了一个非常重要的问题。
- 不失真采样就成为了数字信号处理的先决条件。
- 奈奎斯特 (Nyquist, 英国)和香农(美国，克劳德·艾尔伍德·香农)独立发现了采样定理。

采样定理：不失真采样的条件

- **采样定理：**若模拟信号的**最大频率**为 W Hz，则至少要以每秒 $2W$ 次的采样频率进行采样，才能由采样值 $x[n]$ 恢复原来的模拟信号 $x(t)$ 。
- 信号的重构：
 - 由采样值 $x[n]$ 恢复模拟信号 $x(t)$ 。

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} x[n] \frac{\sin[\omega_N(t - nT_s)]}{\omega_N(t - nT_s)} \quad \omega_N = \frac{\pi}{T_s} : \text{奈奎斯特角频率}$$

几个物理量的定义

- **奈奎斯特采样率：不失真采样的最小采样频率**，即模拟信号最大频率的2倍（即 $2W$ ）。
- **奈奎斯特频率**：采样速率的一半 $f_N = f_s \div 2$
- **奈奎斯特范围(Nyquist range)**：零到奈奎斯特频率的范围。对于DSP系统而言，频率位于奈奎斯特范围内的模拟信号才有意义。

不失真采样：采样率足够

- 若满足采样定理，则从模拟/数字转换后的数字信号可以恢复原模拟信号。
- 从 $x[n]$ 的端点用光滑的曲线拟合起来，则和原模拟信号非常相似。

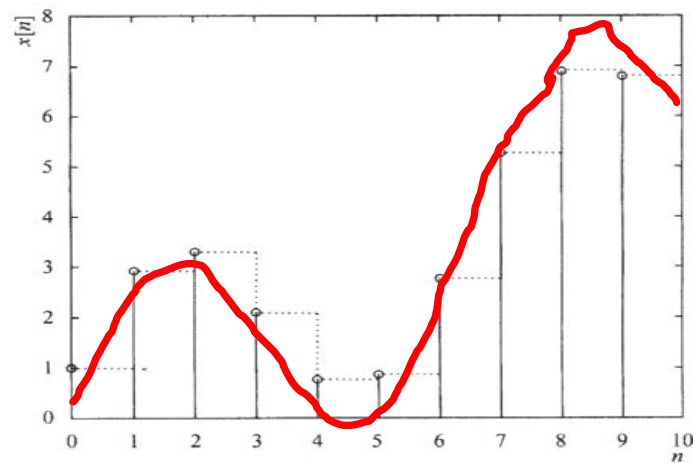
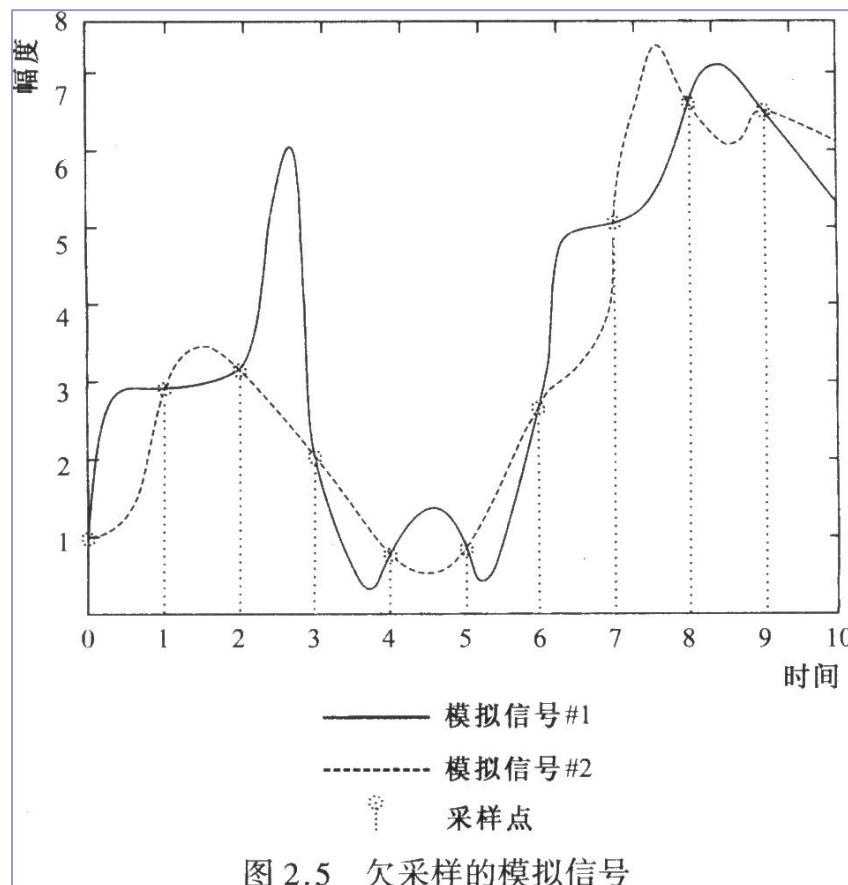


图 2.4 数字信号(连同采样保持信号)

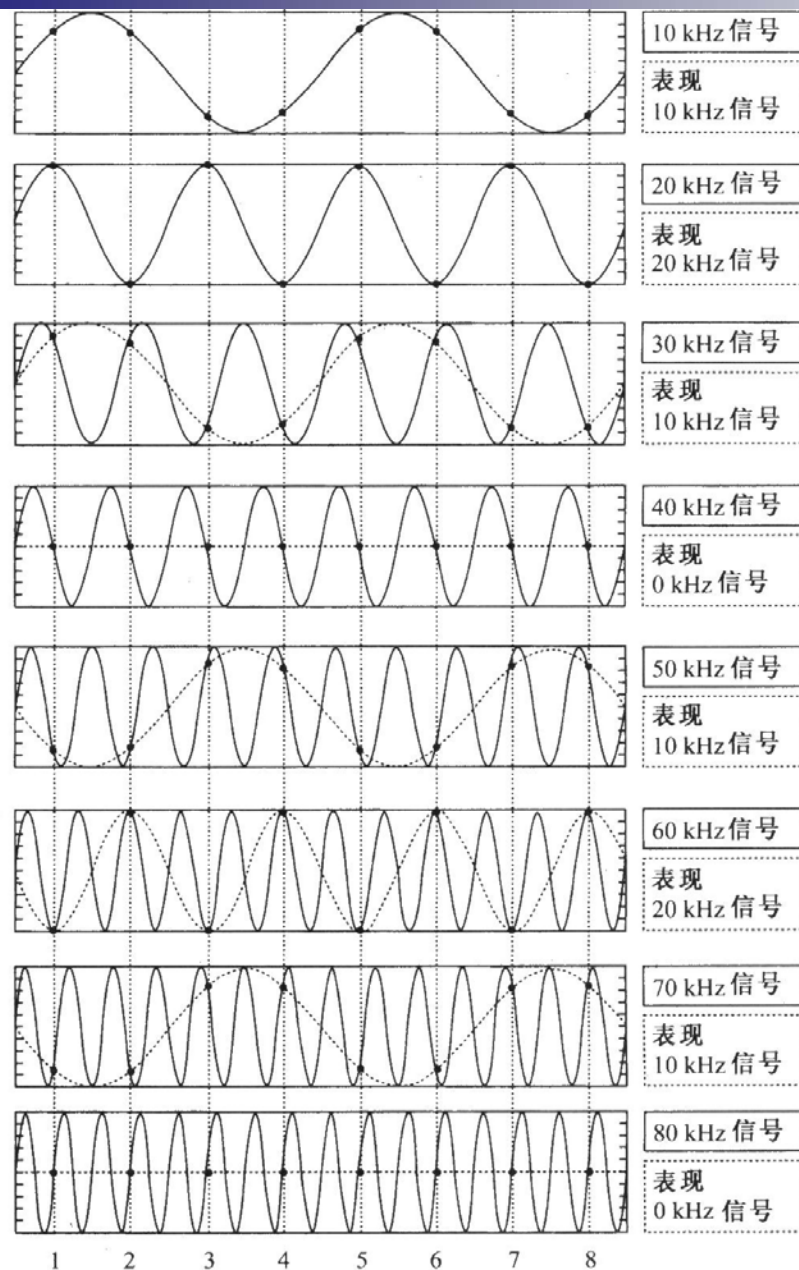
- 如果采样速率跟不上模拟信号的变化，则采集后的数字信号无法恢复原信号，即会出现混叠现象。如图2.5所示的欠采样。
- 采样速率太低，产生这些采样值的模拟信号就会有不确定性。模拟信号#1和模拟信号#2只是可以产生图2.5中采样值的两个信号。然而当采样频率足够高时，源信号就可以惟一确定：只有一个信号能产生所给的一组采样值。

欠采样-采样率不足



欠采样和混叠

- 欠采样：实际采样频率小于奈奎斯特采样率。
- 混叠：由采样信号 $x[n]$ 恢复出来的模拟信号 $x(t)$ ，呈现的频率不超过奈奎斯特频率 f_N 的现象。
 - 图2.6（P25下页）表示了混叠现象，用40KHz的频率对8种信号进行采样所得到的结果。
 - 高于奈奎斯特频率的信号将折返并还原成低频率信号。
- 对正弦信号，最小采样频率 $>2W$ 。



时域混叠实例

- 根据奈奎斯特采样定理，只有频率不大于 20 kHz 的信号通过 40 kHz 的频率进行采样，才可以完全恢复。当然 30 kHz 的信号也可以用 40 kHz 的频率进行采样，但是这个不足的采样点描绘出的是看起来频率为 10 kHz 的信号。对 40 kHz 的信号，采样值在一条水平线上。

抗混叠滤波器(antialiasing filter)的作用

- 一旦系统的采样频率选定，就要采取措施以确保大于奈奎斯特频率的频率分量将从系统中排除，许多信号包含噪声或其他次要的高频分量，在采样前要将它们消除，如图2.7(a)频谱所示。这就是图2.1和图2.7(b)所介绍的抗混叠滤波器(antialiasing filter)的作用。

- 消除高于 f_N (奈奎斯特频率)的噪声或其它的次要的高频分量。**

- 这个滤波器从要被采样的信号中消除了所有超过奈奎斯特频率的信号分量，以确保奈奎斯特采样将足以完整地记录信号。同时，消除了所有超过奈奎斯特频率的噪声，防止高频噪声对有用信号的干扰。图2.7(c)是滤波后的信号频谱，这样可以用每秒 $2W$ 个采样点的速率进行采样。

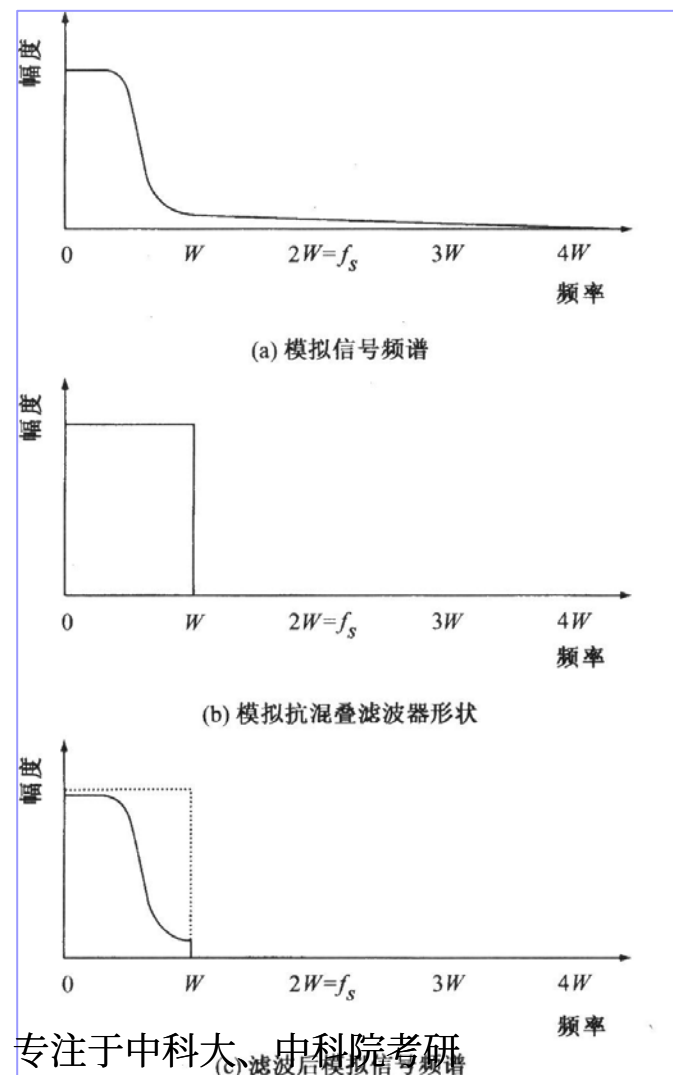
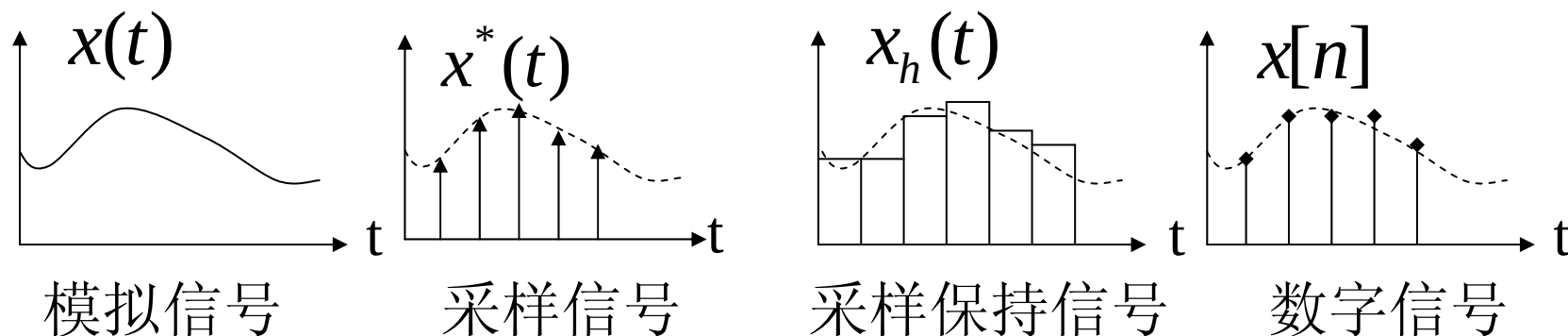
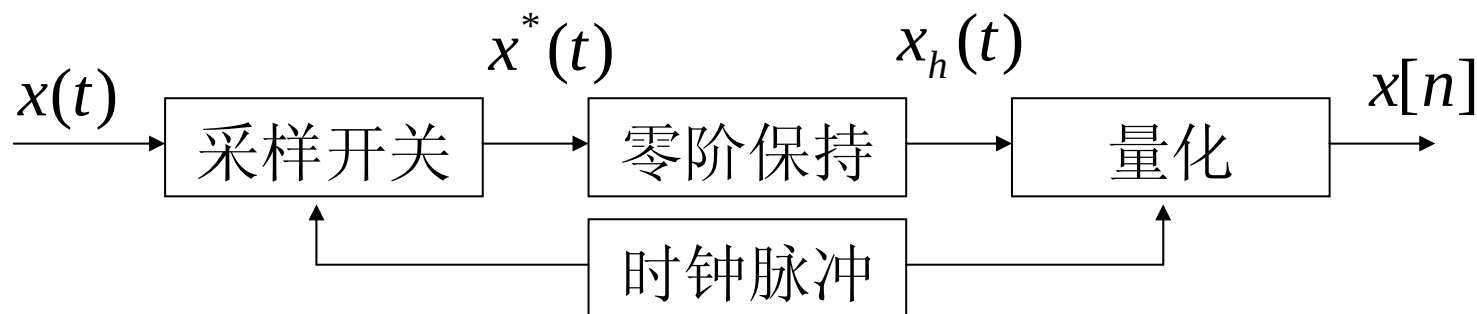


图 2.7 抗混叠滤波器

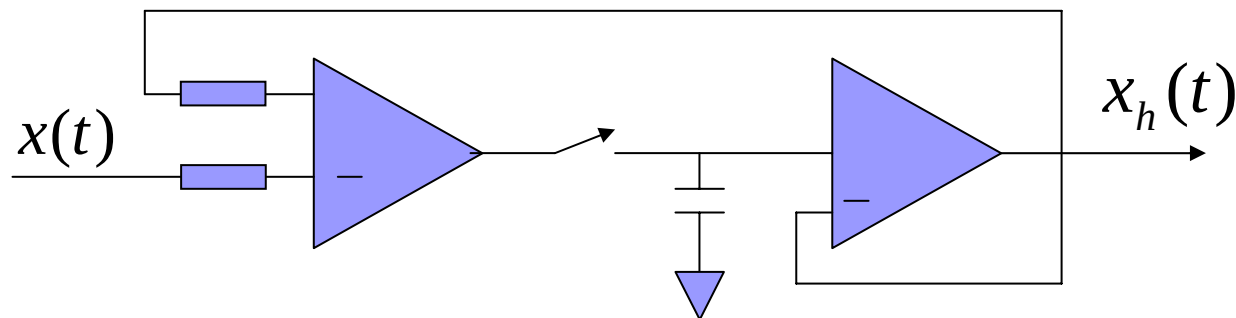
补充：实际采样及采样信号的频谱

采样过程及采样信号的频谱

(1)采样过程：以 T 为周期抽取模拟信号 $x(t)$ 的即时值 $x[n]=x_d(nT)$ 的过程



(2) 零阶保持过程：把采样值保持一个周期不变

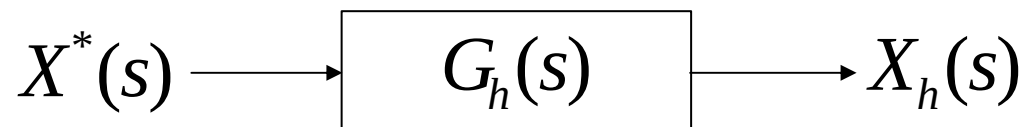


$$x_h(kT + \Delta t) = x(kT) \quad 0 \leq \Delta t < T \quad k \text{ 为整数}$$

$$x_h(t) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT) [u(t - kT) - u(t - kT - T)]$$

$$u(t - kT) = \begin{cases} 1 & t \geq kT \\ 0 & t < kT \end{cases} \quad \text{单位阶跃信号}$$

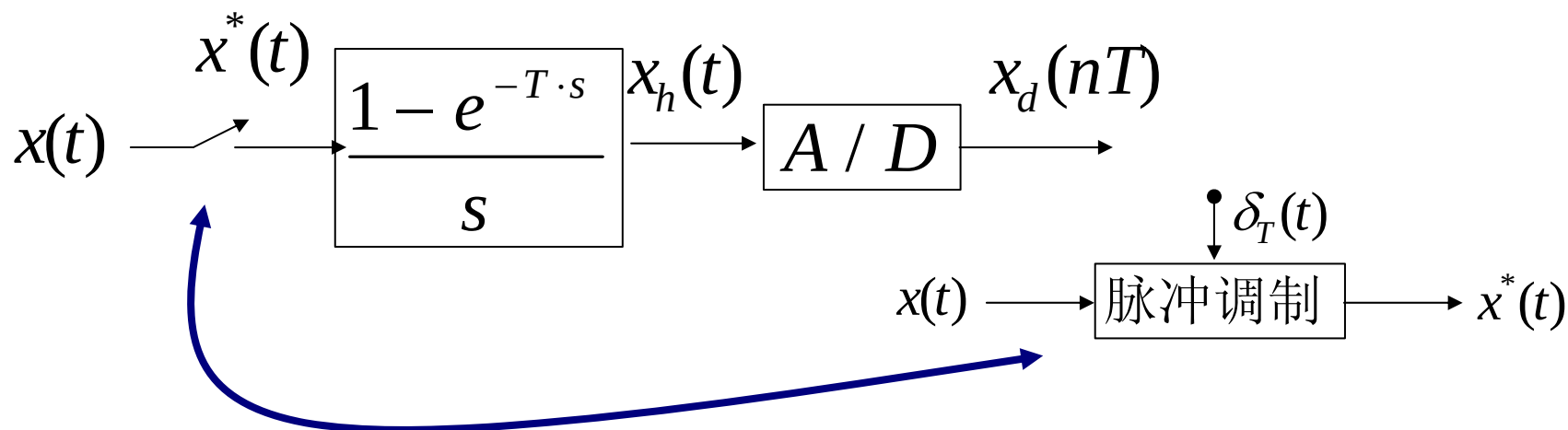
$$\begin{aligned}
 X_h(s) &= L[x_h(t)] = L\left[\sum_{k=0}^{\infty} x(kT)[u(t-kT) - u(t-kT-T)]\right] \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} x(kT) \left[\frac{e^{-kTs}}{s} - \frac{e^{-kTs-Ts}}{s} \right] \\
 &= \frac{1-e^{-Ts}}{s} \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)e^{-kTs} \quad G_h(s) = \frac{1-e^{-Ts}}{s} \\
 &= G_h(s) \bullet X^*(s) \quad X^*(s) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)e^{-kTs}
 \end{aligned}$$

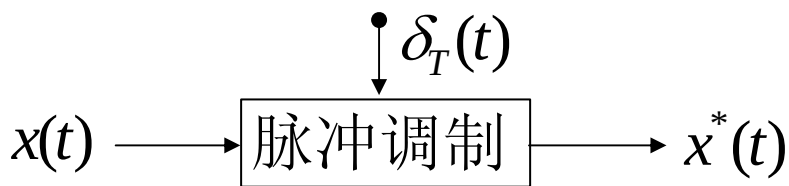


$$X^*(s) \text{ 对应的原函数 : } \begin{cases} x^*(t) = L^{-1}[X^*(s)] = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)\delta(t - kT) \\ \delta(t - kT) = \begin{cases} \infty, t = kT \\ 0, t \neq kT \end{cases} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT) dt = 1 \end{cases}$$

$x^*(t)$ 称为脉冲采样函数

脉冲或冲击函数





$$\because x(kT) \cdot \delta(t - kT) = x(t) \cdot \delta(t - kT)$$

$$\therefore x^*(t) = x(t) \sum_{k=0}^{\infty} \delta(t - kT) = x(t) \delta_T(t)$$

$$\text{其中 } \delta_T(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \delta(t - kT)$$

采样信号的频率特性

$$\text{由 } X^*(s) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)e^{-kTs} \quad \text{得 } x^*(t) \text{ 的频率特性} \quad X^*(j\omega) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)e^{-j\omega kT}$$

$$\text{设采样角频率为 } \omega_s \quad \text{则 } T = \frac{2\pi}{\omega_s} \quad \omega_s T = 2\pi$$

离散信号的频率特性是周期函数

$$X^*(j\omega + jm\omega_s) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)e^{-j\omega kT} \cdot e^{-jkm\omega_s T} = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)e^{-j\omega kT} \cdot e^{-jkm \cdot 2\pi} = X^*(j\omega)$$

采样信号的解析表达式 $x^*(t) = x(t) \sum_{k=0}^{\infty} \delta(t - kT) = x(t) \delta_T(t)$

$\delta_T(t)$ 为以 T 为周期的函数, 必能展开为傅立叶级数

$$\delta_T(t) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k e^{jk \cdot \omega_s \cdot t}$$

$$A_k = \frac{1}{T} \int_{-0.5T}^{0.5T} \delta_T(t) e^{-jk \cdot \omega_s \cdot t} dt = \frac{1}{T}$$

$$x^*(t) = x(t) \delta_T(t) = x(t) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{T} e^{jk \cdot \omega_s \cdot t} = \frac{1}{T} \sum_{k=0}^{\infty} x(t) e^{jk \cdot \omega_s \cdot t}$$

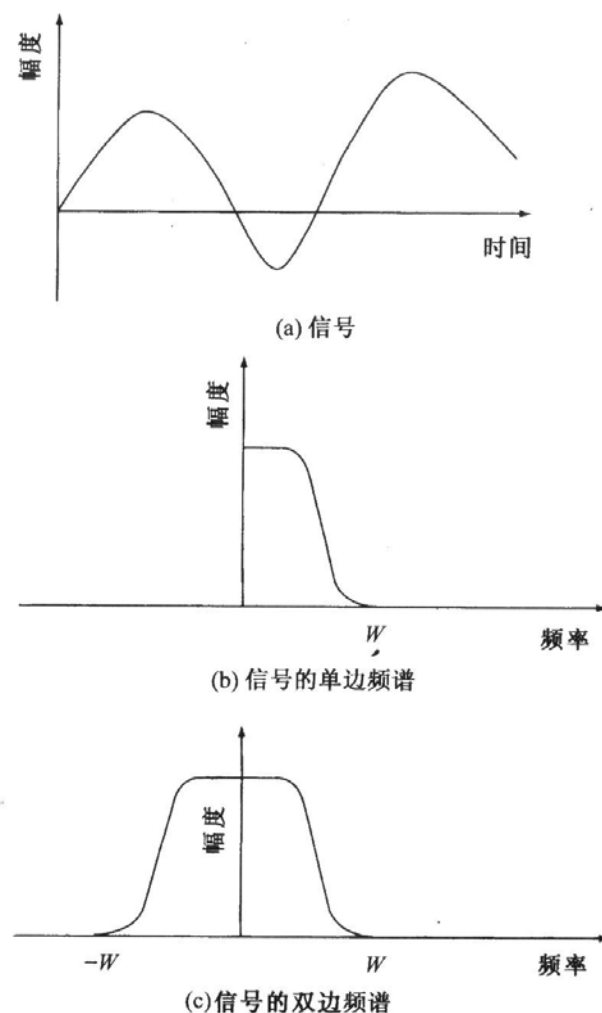
拉氏变换的指数定理 $\Rightarrow X^*(s) = \frac{1}{T} \sum_{k=0}^{\infty} X(s + jk \cdot \omega_s)$

$$\text{以 } s = j\omega \text{ 代入上式} \Rightarrow X^*(j\omega) = \frac{1}{T} \sum_{k=0}^{\infty} x(j\omega + jk \cdot \omega_s)$$

1. 上式说明，采样信号的频率特性是以采样角频率的整数倍为中心的原模拟信号频率特性的副本，但幅值是原信号频率特性幅值的 T 分之一倍。
2. 频谱是频率特性的幅度和相位，故采样信号的频谱是以采样频率的整数倍为中心的原信号频谱的副本。
3. 采样信号的频谱不仅包含($k=0$ 的)原频谱（基频），而且包含原频谱的高频副本。

2.2.2 从频率的角度看采样定理

- 带限信号：信号有可确定的最大频率 W 如图2.8
- 在频谱图上，超过 W 的信号频谱的大小为0。为了便于叙说和分析，把单边频谱以原点为中心镜像为双边频谱。
- 采样在时域里得到一系列采样值，而在频域中得到以采样频率的整数倍为中心的原模拟信号双边频谱的镜像（副本）。前面的补充内容给出了数学证明。即采样信号的频谱是以 $\pm n \cdot f_s$ 为中心的频谱镜像。



2.2.2 从频率的角度看采样定理（续）

- 从图2.9可以清楚地看出奈奎斯特定理的含义：
 - 当 $f_s > 2W$ ，采样后的频谱副本不重叠，通过低通滤波器可以过滤出原始信号的频谱（相当于时域上恢复了原始的信号）。
 - 但是如果 $f_s < 2W$ ，则采样后的频谱有重叠，在重叠的地方，频谱分量相加，无法从离散信号的频谱恢复出原始的模拟信号频谱。
 - $f_s = 2W$ 为临界的情况

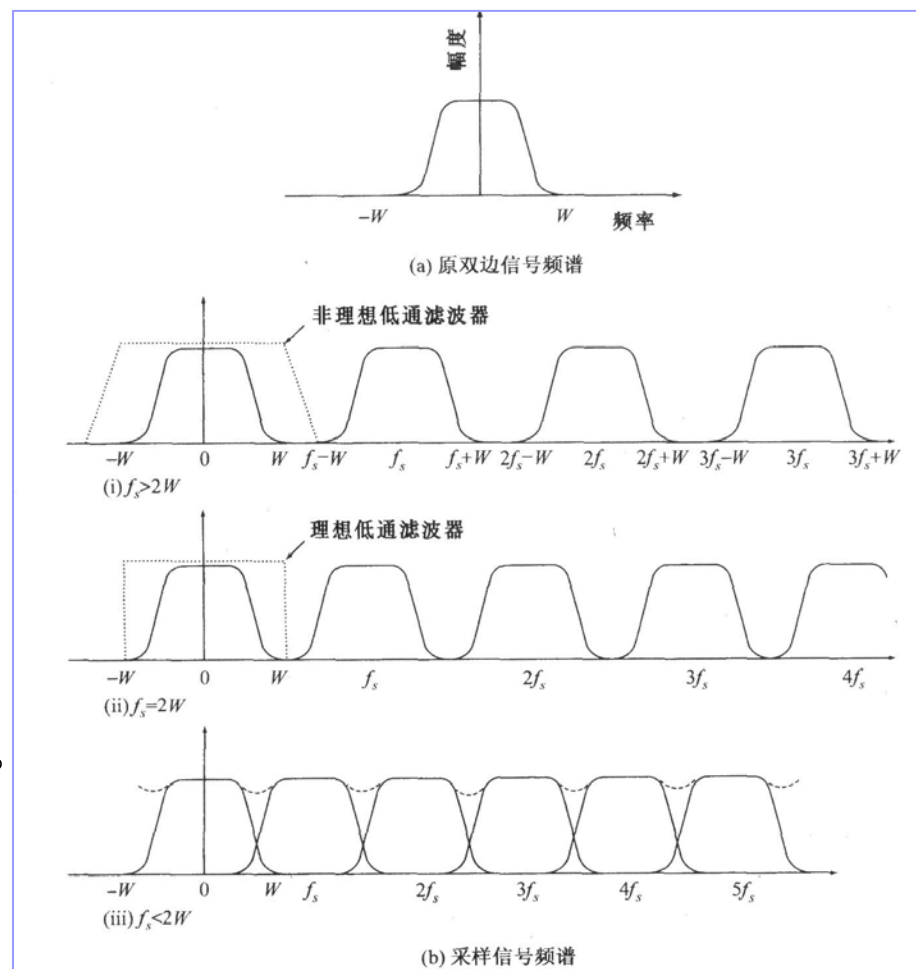


图 2.9 原信号与采样信号频谱

2.2.2 从频率的角度看采样定理（续）

- 正弦信号：每个周期至少两个采样点。
- 图2.10所示的正弦、三角波、方波都有相同的采样值，似乎和奈奎斯特定理矛盾。但是从谐波分析可知，三角波、方波都是由无限个正弦信号叠加而成的，最低频分量和正弦波相同，抗镜像滤波器消除高频分量，仅仅剩下正弦波，即只能恢复出正弦波。

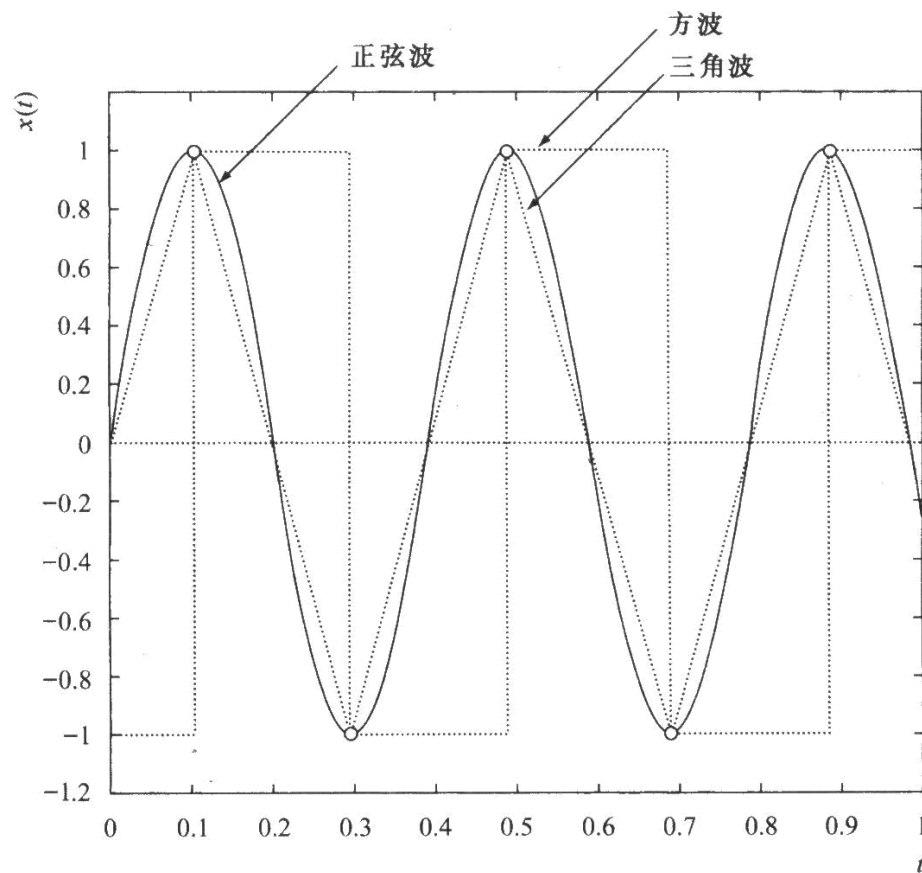


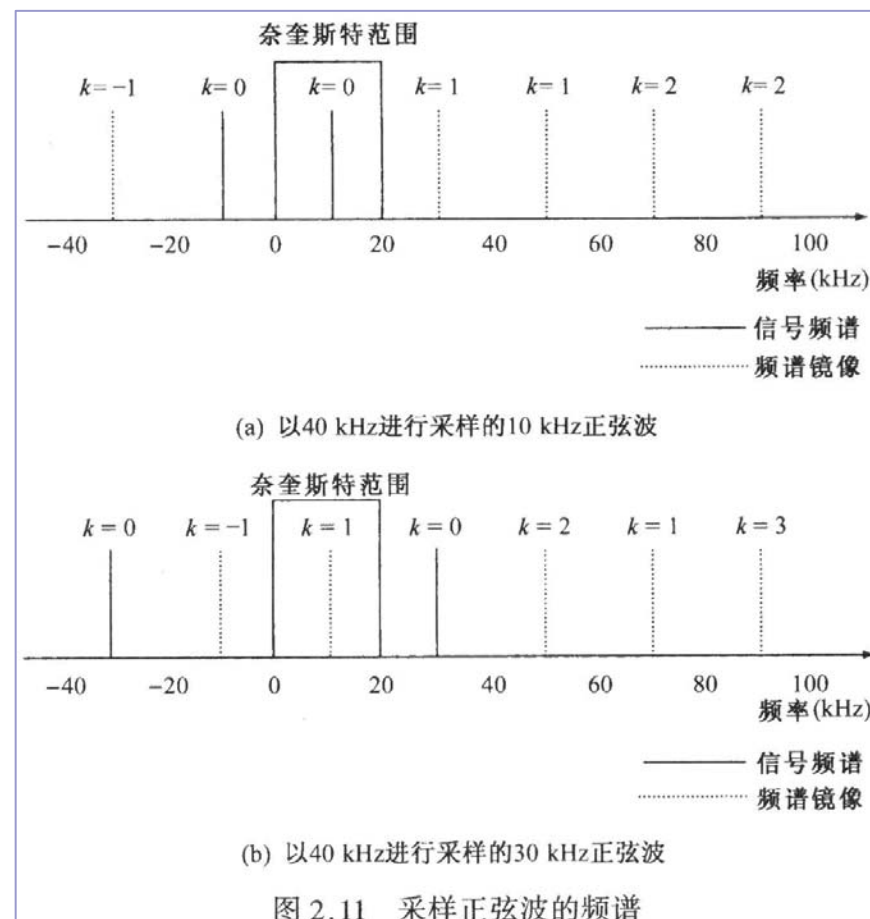
图 2.10 以奈奎斯特速率进行采样的正弦波

2.2.2 从频率的角度看采样定理（续）

- 采样会导致频谱的镜像出现在采样频率的倍数处。
 - 频率为 f 的信号，采样后的频谱具有 $kfs \pm f$ Hz 的频率分量，其中 f_s 是采样频率， k 为所有整数。这样，采样后的频谱有无限多个镜像。
 - 而抗镜像滤波器就要从这些镜像中恢复信号，不管奈奎斯特采样要求是否满足，都要进行该计算。
 - 不满足要求时，计算给出的是一个混叠频率或许多混叠频率。

2.2.2 从频率的角度看采样定理（续）

- 例如，图2.11是以 40 kHz 采样的两个正弦波的双边频谱，第一个频率为 10 kHz ，对所选定的采样频率来说低于奈奎斯特频率。一些镜像位于 -40 ± 10 ， 0 ± 10 和 $40 \pm 10\text{ kHz}$ ，或 -50 ， -30 ， -10 ， 10 ， 30 和 50 kHz 处，这些频率中只有一个处在 0 到 $1/2$ 采样频率范围内，这样，信号频率可正确地确定为 10 kHz 。

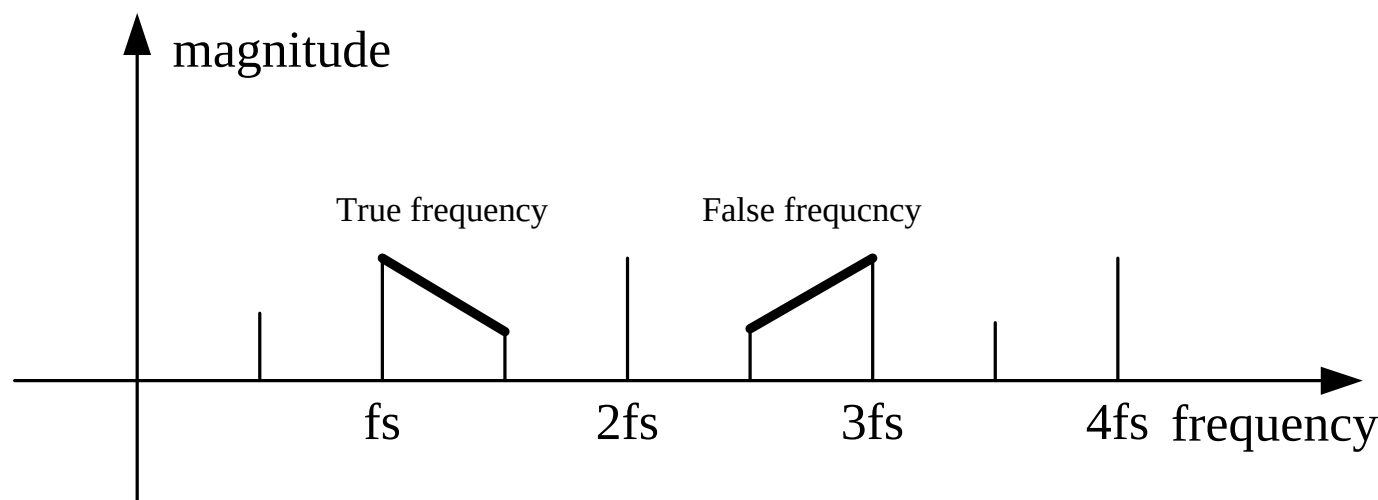


呈现频率

- 呈现频率：采样后的信号所表现出来的频率（ $[0, 0.5f_s]$ ）。
- $k \cdot f_s \pm f$ 落在奈奎斯特范围 $[0, 0.5f_s]$ 内的副本的频率
- 若略微改变 f_s ，呈现频率也改变，则呈现频率为**假频**。
- 比如 $f_s=40\text{Hz}$ ，如果信号的频率 $f=30\text{Hz}$ ，则 $40 \pm 30=10$ 或 70 ，呈现频率 $=10$ ；但改变 f_s 为 41 ，则呈现频率 11 ，所以呈现频率为**假频**。但是若 $f=10\text{Hz}$ ， $f_s=40\text{Hz}$ ，则呈现频率也为 10 ； $f_s=41$ ，则呈现频率仍然为 10 ，为实际频率。

呈现频率为假频的危害

- 若呈现频率为假频，则因为它会受采样频率微调的影响，容易产生**频谱畸变**。在工程上应避免假频的出现。



带限信号的采样

- **带限信号**：信号的频率分布在一个频率区间内，即 $f \in [f_1, f_2]$ 。
- **对带限信号的采样**：有时也称为**欠采样**，采样频率为带宽的**2倍以上**。没有必要以2倍最大信号频率的速度采样。这是因为频谱镜像的结果把原频谱镜像到基频段 $[-f_N, +f_N]$ 。此时要**避免频谱反转而带来的失真**。

带限信号的采样频率的确定

- 如图2.12所示
 - 信号频率 $f=[120\text{kHz}, 160\text{kHz}]$,
 - 带宽 $B=40\text{kHz}$, $W_1=120$ $W_2=160$
- 带限信号不失真欠采样频率 f_s 的条件：
 1. $f_s \geq 2B$
 2. 存在整数 N 使得 $Nf_s \leq W_1 \leq W_2 < Nf_s + 0.5f_s$
- 对图2.12(下页)所示的信号， $f_s=120\text{kHz}$ 时，才满足不失真采样的要求。

频谱反转

频谱混叠

不失真采样

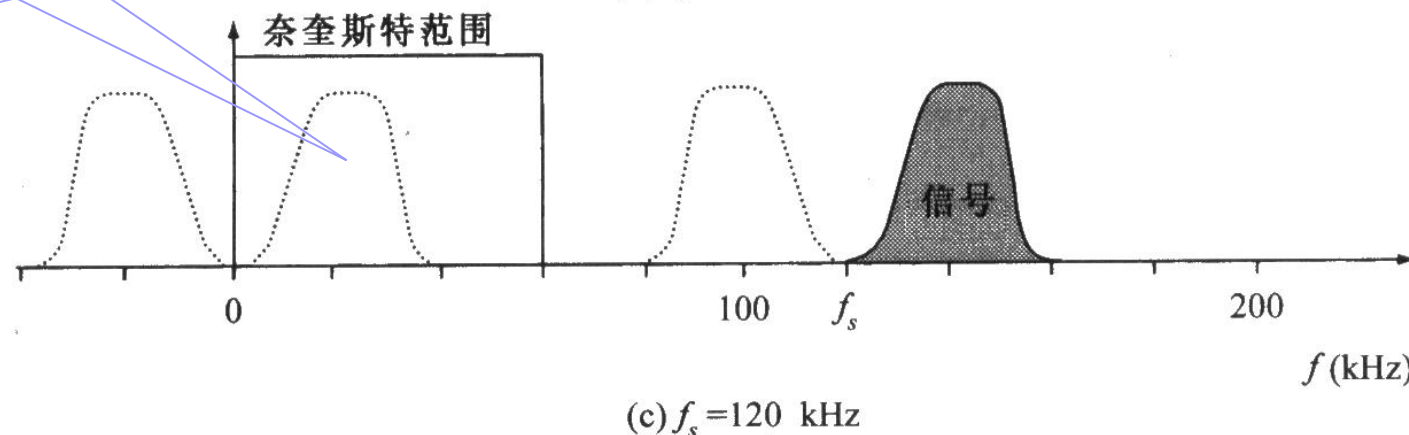
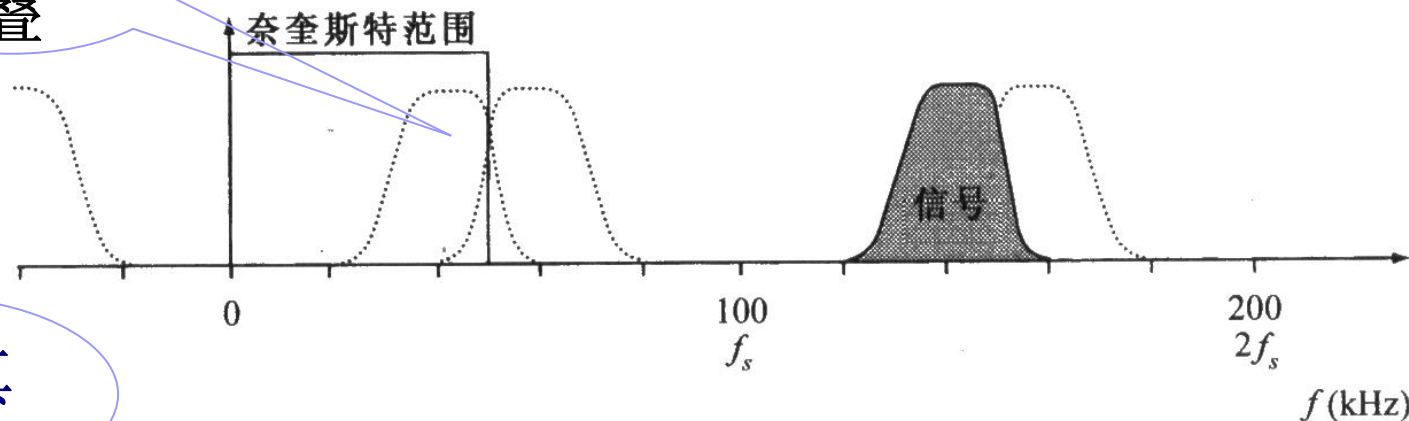
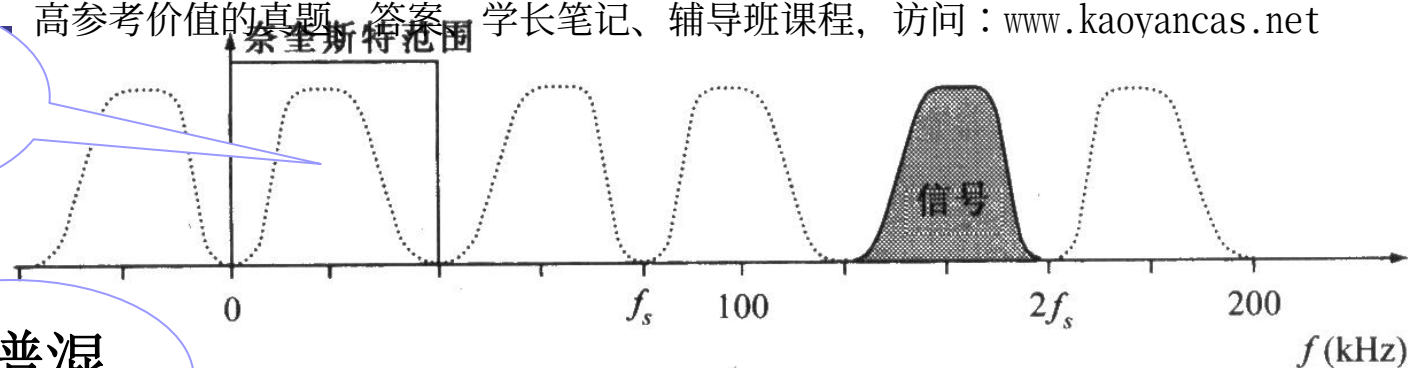


图 2.12 带限信号采样的频谱

2.2.2 从频率的角度看采样定理（续）

■ 验证如下： $B=40, f_s \geq 80$

① $f_s=80$ ，不存在满足**条件2**的 N

若 $N=2$ ，则 $Nf_s=160$ ， $Nf_s+B=200$

信号频带处于 Nf_s 的左端，**频谱反转**

② $f_s=100$ ，**频谱混叠**

③ $f_s=120$ ，**不失真的欠采样**

$$\begin{cases} N \cdot f_s - \frac{1}{2} f_s \leq W_1 < W_2 < N \cdot f_s : \text{频谱反转} \\ N \cdot f_s \leq W_1 < W_2 < N \cdot f_s + \frac{1}{2} f_s : \text{不失真欠采样} \\ \text{其它：频谱混叠} \end{cases}$$

■ 蜂窝电话：

□ $W1=900\text{MHz}$ $W2=900\text{MHz}+30\text{kHz}$

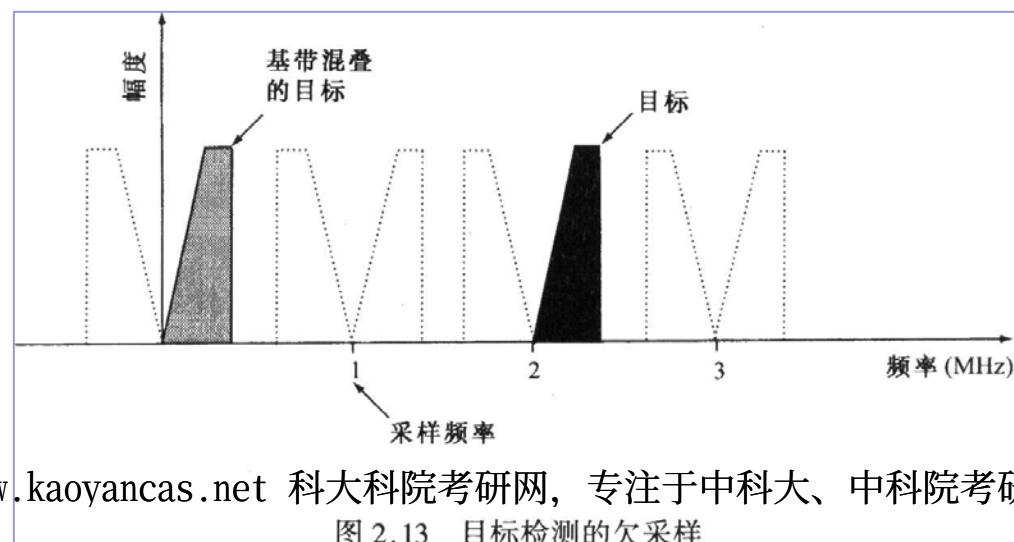
□ 用**辅助软件**计算出第一个可用的频率为 60492Hz ,第二个可用的频率为 60988Hz

■ 通常都想避免混叠(本质上是频率复制)，但混叠有时是有好处的，比如自动目标检测，在其它频率的信号中检测是否有特定频率的信号。

■ **自动目标检测**：图2.13目标检测的欠采样

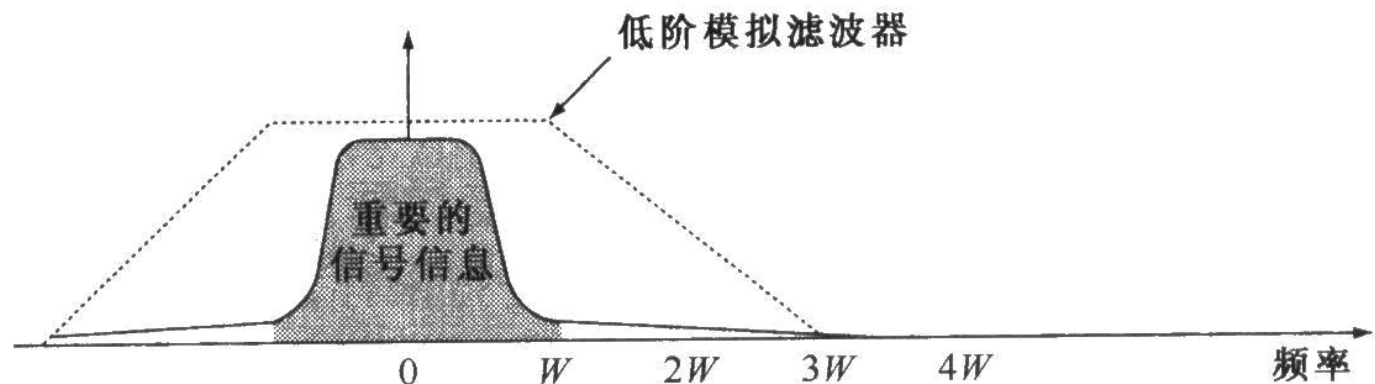
模拟带通滤波+采样+DSP

信号在 2M 到 2.4MHz ， $f_s=1\text{MHz}$

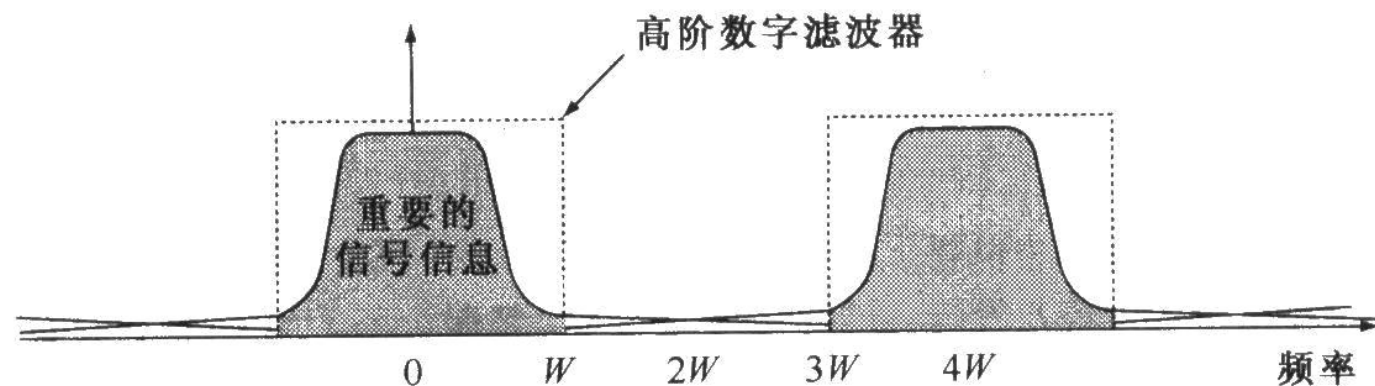


过采样

- 如果输入的模拟信号最大频率未知，则必须用抗混叠模拟滤波（截止频率为 W ）滤除频率大于 W Hz的所有信号。
- 但理想的低通滤波器不存在，这时只要滤波后残留的高频信号的电平减小到AD转换器的量化误差最小值以下，则对系统的影响就很小。
- 过采样
 - 以超过奈奎斯特采样率的频率进行采样（2倍以上）。过采样使模拟滤波后残留的高频信号频谱不影响重要信号的频谱（或影响较小）。在此基础上用数字滤波器滤除高频信号，可以节约成本，降低高阶模拟滤波器的复杂性，减少模拟滤波器的相位失真问题（见图2.14 P32）。



(a) 采样前模拟滤波



(b) 采样后数字滤波

图 2.14 过采样

以两倍奈奎斯特采样率 $4W$ 进行采样

例 2.1 (P32)

许多人都有这样的幻觉，电影或电视上的车轮看起来向后转。这是混叠的直接结果，也就是说，拍摄时镜头拍摄的速率不够快，没有记录轮子的正确旋转。直径为0.6米的普通轮子周长是1.88米，这是轮子运转一周所走的路程。汽车的车速里程表上记录的速度是千米/小时， v 千米/小时的速度相当于 $1\,000v/3\,600=0.278v$ 米 / 秒。轮子每秒钟转的圈数可由下式得到：

$$\text{频率} = \frac{0.278v \frac{\text{米}}{\text{秒}}}{1.88 \frac{\text{米}}{\text{圈}}} = 0.147\,9v \text{ Hz}$$

为满足奈奎斯特定理，对旋转轮胎的快照至少要以旋转频率的两倍，即：

$$\text{最小采样频率} = 2 \times (\text{最大频率}) = 0.295\,8v \text{ Hz}$$

大多数商业上16 mm的相机具有2到64张 / 秒的记录速度。一般选择16张 / 秒。在此记录速度下，允许的最大速度可由

$$16 = 0.295\,8 \, v_{\max}$$

求出。换句话说，速度大于 $16/0.295\,8=54.1$ 千米/小时就不能准确记录轮子的旋转。

2.3 量化

- 任何一种数字处理都要占用资源，**采样可以把要处理的数据个数减少到有限量**，使DSP系统来得及处理输入信号，即**时间复杂性（占有率）减少到DSP可以接受到的程度**，DSP不至占用过多的时间资源。
- **量化可以减小对存贮资源的占用**，使数字信号的存贮在可接受的范围内。要把模拟信号精确表示出来，理论上要求用无限多个比特来表示，因为不失真的模拟信号对应的实数有可能有无限多位有效数字，需要无限大的存贮空间，这显然是不可行的。因此应该对模拟信号进行量化，**使存贮信号所需的空间代价在可接受的范围内**。

量化和量化电平

- **量化**：用最接近的量化电平代替采样保持电平。
- **量化电平**：二进制数对应的电压值，取决于字长和模拟信号的最大变化范围。
- 模拟采样值按最近的有效量化电平进行编码，所以当比特数有限时将存在误差。使用 **N** 比特，计算机可表示 **2^N** 个可能的值。
- 所用比特数越多，数字信号与模拟信号就越接近，但处理信号的时间也就越长。

量化实例

- 例：用二比特的数字表示 $0\sim 2V$ 的模拟电压
 - 可能的数字有4个：00 01 10 11
 - $2V/4=0.5V$
 - 对应的量化电平：0.25V 0.75V 1.25V 1.75V
 - 事实上把 $0\sim 2V$ 分为4等分，**每个区间的中点对应一个代码。** $[0,0.5)$ $[0.5,1)$ $[1,1.5)$ $[1.5,2]$
 - 模拟信号可以取0.8 v，但根据规定的量化电平，数字信号就不能取这个值。用0.75V这个量化电平代替0.8V，用数字代码01表示，这样就带来了**量化误差**(0.05V)。

量化步长 Q

- 量化步长：相邻的量化电平的间距 $Q=R/2^N$
 - R ：模拟量的最大变化范围。
 - N ：数字信号的字长（比特数）。
 - Q 也称为量化器的分辨率。
- 因为每个量化电平对应模拟电平的一个取值区间，因此**量化必然导致不同的量化误差**。
- **量化误差 = 量化值 - 实际值**。
- **量化方式的不同会导致不同的量化误差**。
- 对于给定的范围，随着比特数的增加，量化步长变小。简单的量化方案是把这个范围分成 2^N 等份，每一等份用一个数字代码表示。

[图2.15]每个区间的(左)端点对应一个有效的数字代码的起点：
最大量化误差 = 整步长 Q

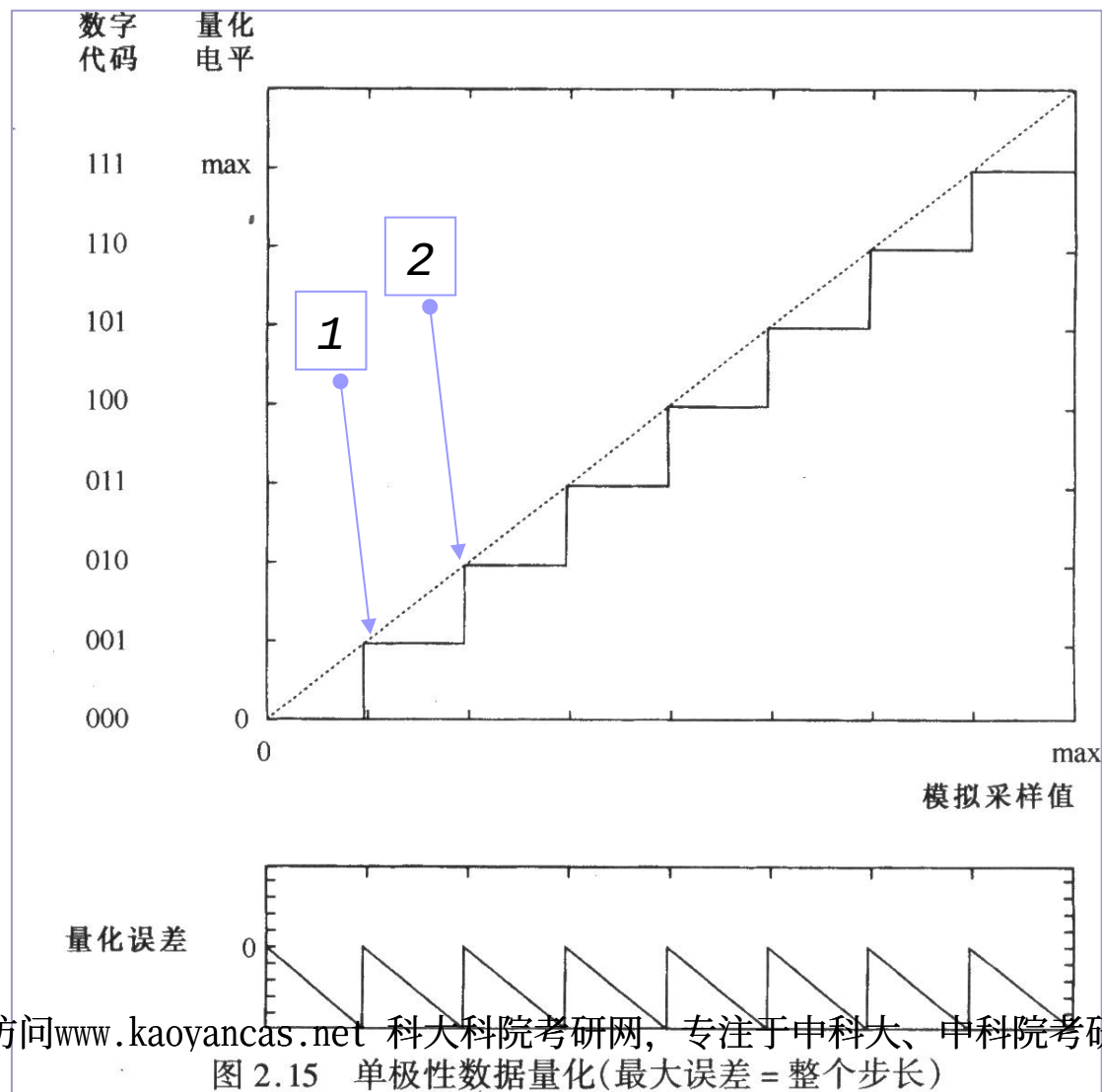
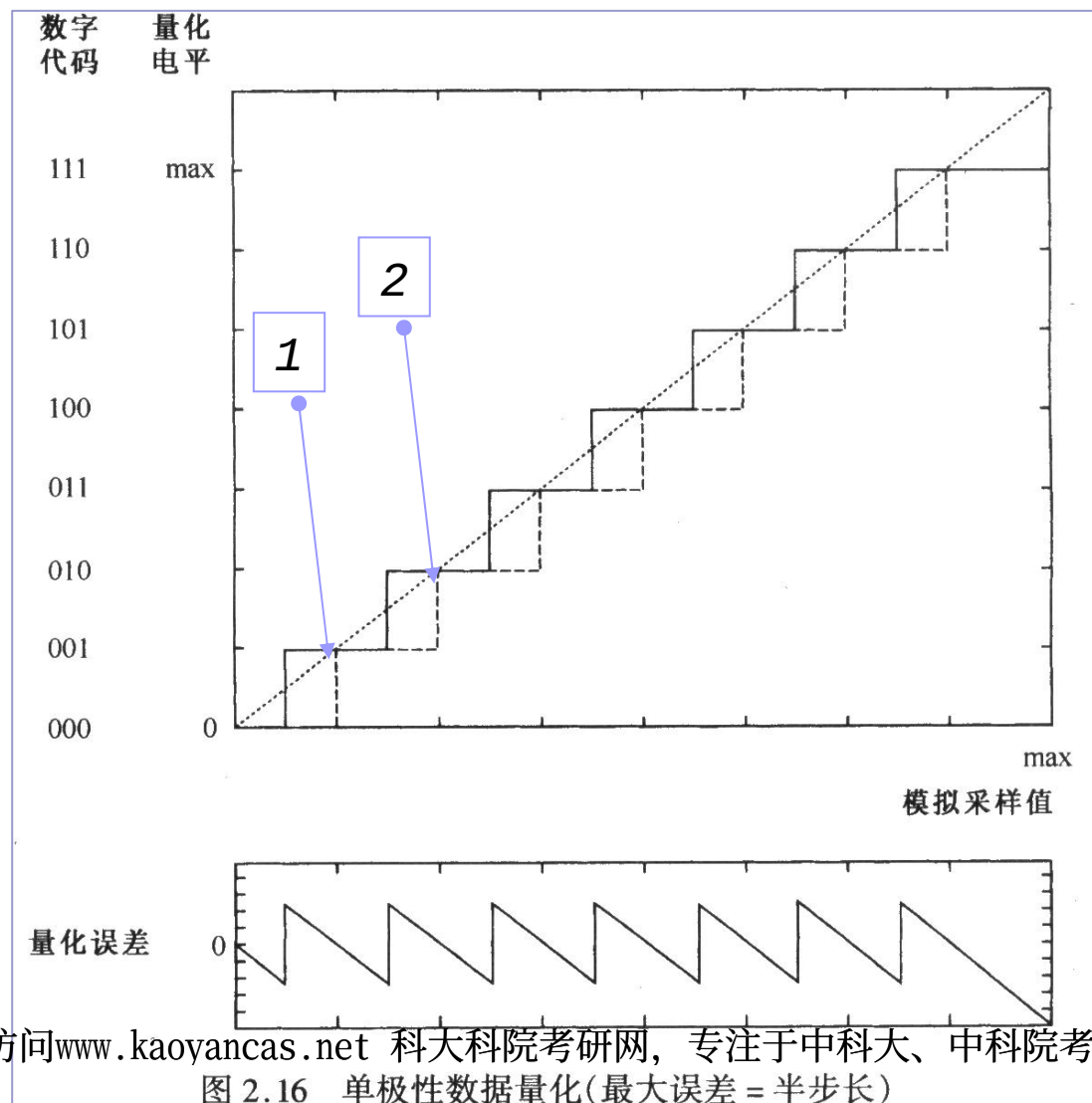


图2.16：每个区间的中点对应一个数字代码
最大量化误差 = 半步长



因为方案二可以减小最大的量化误差 是最常用的量化方案

例2.2

用传感器记录模拟压力的电压在0到3 V之间，信号采用三比特数字代码进行量化。说明模拟电压是如何转换成数字值的。

解：

因为信号的范围是3 V，则其量化步长大小为：

$$Q = \frac{3V}{2^3} = 0.375V$$

一半是0.187 5 V，表2.1给出了8个数字代码及相关的模拟范围，这一点可由图2.17看出。注意第一个代码只占半个步长范围，最后一个代码必须占一个半步长，其他的各占一个整步长。与数字代码对应的量化电平在表的中间一列，对应于图上对角理想特性与阶梯量化曲线的交点。正如所讲，这种量化方案，大于1/2量化间隔的误差仅发生在最大输入的地方。代码111(量化电平2.625 V)必须对应2.437 5到3 V的输入范围，这样在对3 V的输入采样进行编码时，将产生整步长的误差(或0.375 V)。

数字代码	量化电平(V)	对应此数字代码的模拟输入范围(V)
000	0.0	$0.0 \leq x < 0.1875$
001	0.375	$0.1875 \leq x < 0.5625$
010	0.75	$0.5625 \leq x < 0.9375$
011	1.125	$0.9375 \leq x < 1.3125$
100	1.5	$1.3125 \leq x < 1.6875$
101	1.875	$1.6875 \leq x < 2.0625$
110	2.25	$2.0625 \leq x < 2.4375$
111	2.625	$2.4375 \leq x \leq 3$

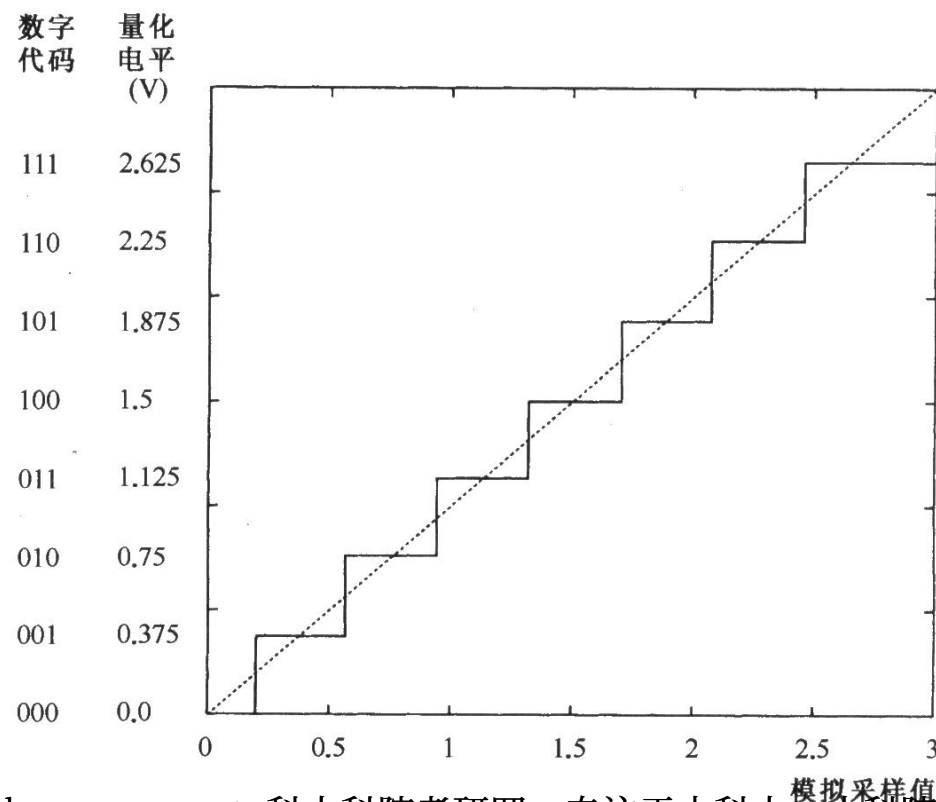


图 2.17 例 2.2 的量化图

双极性模拟信号的量化也是类似的

- **双极性(bipolar)模拟信号在正负最大值之间变化。量化误差对双极性信号的影响与单极性信号相同。**
- 对双极性信号的最好方案是从图2.16的单极性量化开始，再向负的方向上扩展。关于零点对称可以保证误差最小。图2.18表示了双极性信号的方案，它将使最大平均误差不超过量化步长的一半。如单极性的情况，最下面的范围是半个步长，最上面的范围是一个半量化步长。注意，图2.18中的数字代码使用了**2的补码(见12.3节)**，它要求负数的第一位必须是1。
- 例2.3表明了双极性量化。

例2.3

量化步长大小为 $10\text{ V}/2^3 = 1.25\text{ V}$ ，建立量化表 2.2。

例2.3

用三比特量化—5到5 V之间的模拟电压，试对下列三个采样值进行量化并记录它们的量化误差。

- a. -3.4 V
- b. 0.0 V
- c. 0.625V

解：

量化步长大小为 $10\text{ V}/2^3 = 1.25\text{ V}$ ，建立量化表2.2。

1. 模拟采样值-3.4 V产生数字代码101，量化误差为 $-3.75 - (-3.4) = -0.35\text{ V}$ 。
2. 模拟采样值0.0 V的代码为000，量化误差为零。
3. 模拟采样值0.625 V产生数字代码001，量化误差为 $1.25 - 0.625 = 0.625\text{ V}$ ，对中间范围，这是最大的量化误差，等于量化步长的一半。

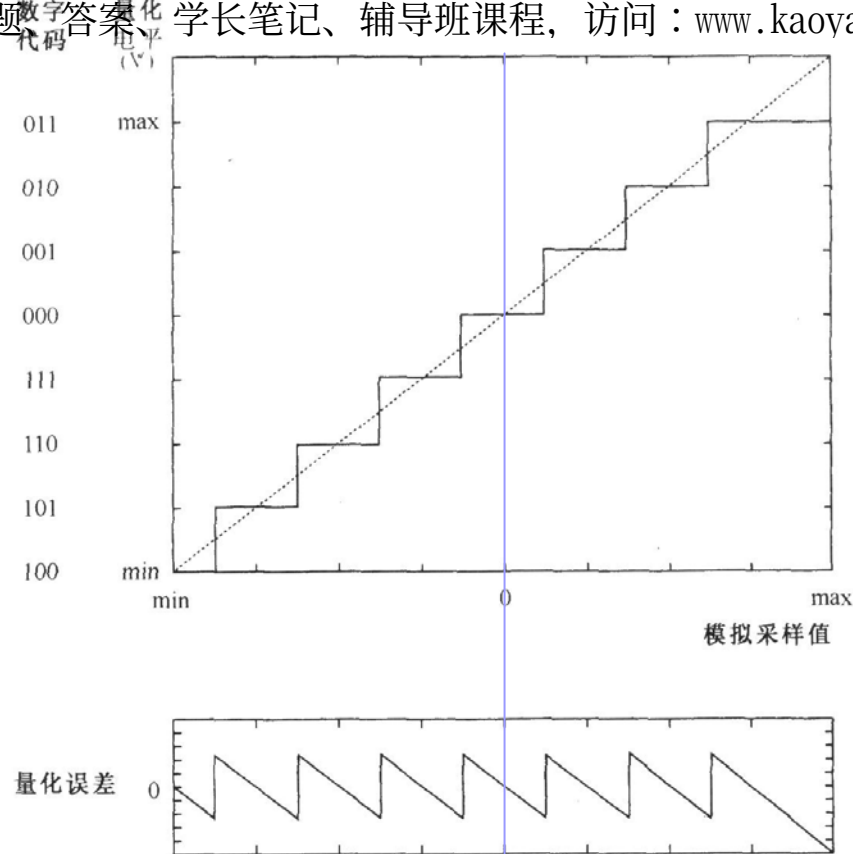


图 2.18 双极性数据量化(最大误差 = 半步长)

表 2.2 例 2.3 量化表

数字代码	量化电平(V)	对应此数字代码的模拟输入范围(V)
100	-5.0	$-5.0 \leq x < -4.375$
101	-3.75	$-4.375 \leq x < -3.125$
110	-2.5	$-3.125 \leq x < -1.875$
111	-1.25	$-1.875 \leq x < -0.625$
000	0.0	$-0.625 \leq x < 0.625$
001	1.25	$0.625 \leq x < 1.875$
010	2.5	$1.875 \leq x < 3.125$
011	3.75	$3.125 \leq x \leq 5.0$

量化噪声

- 因为最大量化误差由量化步长的大小决定，所以增加表示每个采样值的比特数可以减小误差，但不能完全消除，它们的综合影响称为量化噪声 (*quantization noise*)。
- 量化器的动态范围 (*dynamic range*) 是噪声中能够区分的电平数目，它是信号与误差值范围的函数，用分贝 (**decibels**) 或dB表示(见附录A. 10)。
- 模拟信号在范围 R 上取值，每个量化的值在实际采样值上下半个量化步长范围内。也就是说，误差在 $-Q/2$ 到 $Q/2$ 间， Q 为量化步长的大小。这样误差在范围 Q 上取值。

几个物理量的定义

- 动态范围： $= 20\log\left(\frac{R}{Q}\right) = 20\log(2^N) = 6.02NdB$
- 信噪比： $SNR = 10\log\left(\frac{\text{信号功率}}{\text{噪声功率}}\right) = 20\log\left(\frac{\text{信号振幅}}{\text{噪声振幅}}\right)dB$
- 所需要的比特长： $N = \log_2\left(\frac{R}{Q}\right) \Leftrightarrow Q = \frac{R}{2^N}$
- N 即满足量化精度所需要的比特数

例2.4 (教材P27)

例2.4 要量化0到5 V的模拟信号,中间量化误差不大于 6×10^{-5} V,满足这个条件需要多少比特?

解:

若允许的最大量化误差是 6×10^{-5} V,则量化步长不大于 12×10^{-5} V,对范围为5 V的模拟信号来说,量化比特将是:

$$N = \log_2 \left(\frac{R}{Q} \right) = \log_2 \left(\frac{5}{12 \times 10^{-5}} \right) = 15.35$$

所以需要16比特量化器。

2.4 模数转换

- 如果信号本身是数字的，则可直接进行数字信号处理，例如每天卖出的报纸数量，不需要采样，不需要量化，且它们是整数值。否则，从传感器获得的模拟信号必须先转换成数字信号。
- 如图2.19所示，模数转换过程包括采样和保持，然后是量化和数字化。采样前，模拟信号先通过低通抗混叠滤波器尽量消除混叠的影响，然后由采样保持电路进行采样。在每个采样点，采样电路尽可能快地获取信号的电流值，并保持到下一个采样点。

模/数转换过程

1. **抗混叠滤波器**：消除混叠的影响，滤除高频噪声和次要信号（使采样保持器的输入信号满足采样定理的要求）
2. **采样保持器**：按照一定的速度（采样周期）采集输入信号，并保持一个周期不变（一块IC芯片）
3. **量化及数字化**：用最接近的量化电平代替采样保持电平。分配量化及数字化的装置是 **A/D 转换器**（一块 IC 芯片）

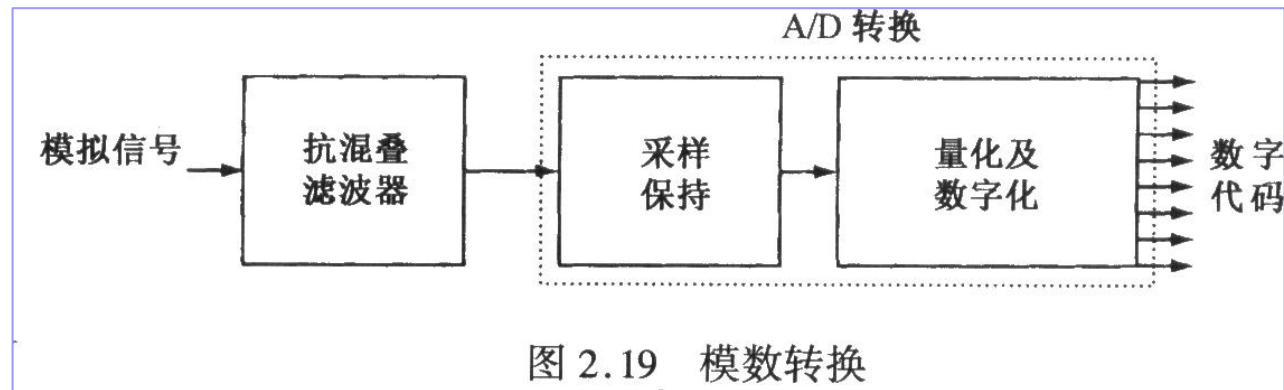


图 2.19 模数转换

图2.20 完整的A/D转换过程中信号的变换

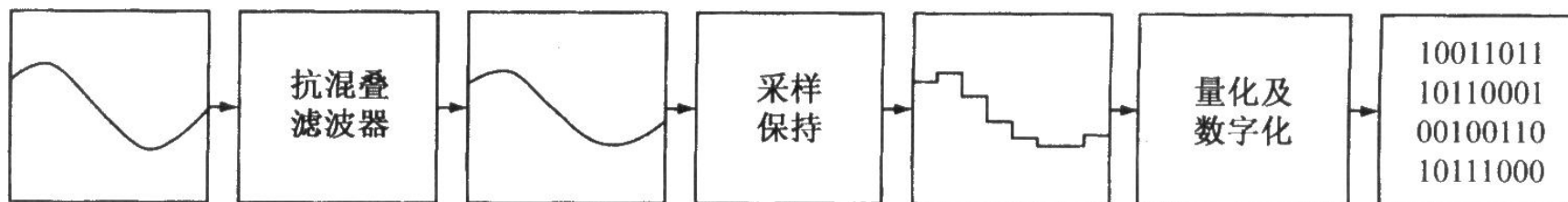
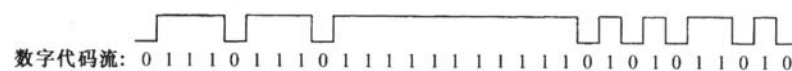
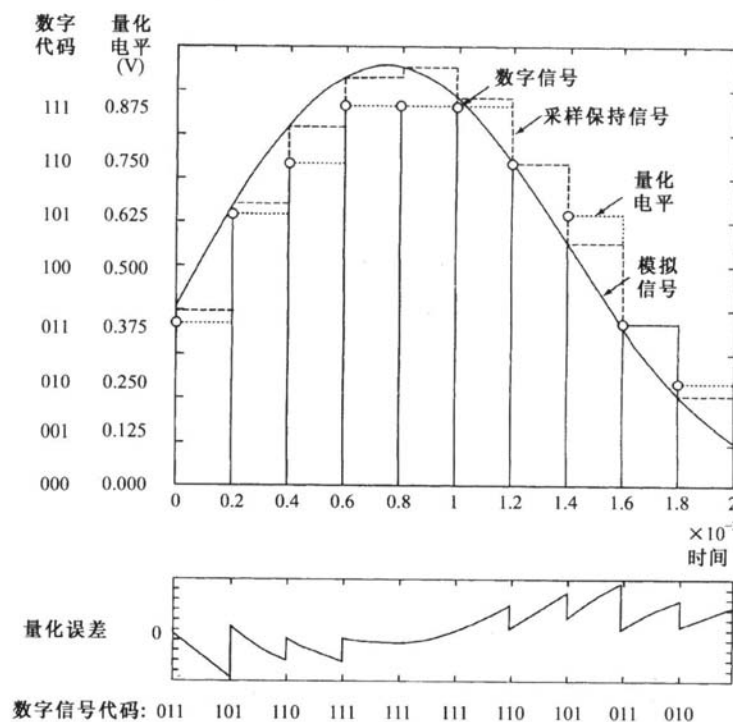


图 2.20 A/D

表 2.3 图 2.21 的量化表

数字代码	量化电平 (V)	对应此数字代码的模拟输入范围 (V)
000	0.000	$0.000 \leq x < 0.0625$
001	0.125	$0.0625 \leq x < 0.1875$
010	0.250	$0.1875 \leq x < 0.3125$
011	0.375	$0.3125 \leq x < 0.4375$
100	0.500	$0.4375 \leq x < 0.5625$
101	0.625	$0.5625 \leq x < 0.6875$
110	0.750	$0.6875 \leq x < 0.8125$
111	0.875	$0.8125 \leq x \leq 1.000$

- 图2.21表示了用3bit的A/D转换器对0~1V范围的模拟信号以 $f_s=5000\text{Hz}$ （0.2毫秒）速度进行转换的信号图和量化误差图。
- 从图中可以看出，数字信号是模拟信号的近似表示，量化误差不可避免。A/D的字长越长，误差越小。



比特率

- A/D 的性能除字长外，另一个主要特征是其**最高极限转换速度**。比特率(*bit rate*)是用来度量比特数产生的速度，通常可用来度量 A/D 转换器的性能，定义为：
$$\text{比特率} = N \cdot f_s$$
 - N : A/D 输出数字信号的比特数（字长）
 - f_s : 最高的转换速度
- 单位为 **b/s** : *bps*为比特数产生或传输的速度
- 比如**10M**的网卡，表示网卡的端口的最高传输速度是**10M**比特每秒。又比如调制解调器：**56K**的 modem **56kbps**

2.5 数/模转换

- 有时，处理后得到的数字代码可直接用来驱动一些不需要模拟输入的设备，如步进电机(磁盘驱动器中的电动机)。而大多数情况下数字代码必须转换为模拟信号，以便可以看到或听到。
- 图2.23所示的数/模转换过程中，电路首先把8比特数字代码变换为模拟电平，它与数字的大小成正比。通过零阶保持，这些电平保持一个采样周期，直到下一个周期开始有新的数字代码。
- 所以 D/A 转换器的模拟输出类似于模数转换过程产生的采样保持信号，呈阶梯状，最后，低通滤波器(**抗镜像滤波器**)平滑了阶梯状的零阶保持信号。

数模转换的3个过程

1. 数字代码转换为模拟(量化)电平（与数字的大小成正比）。
2. 模拟电平通过零阶保持器，保持一个周期大小不变。
3. 零阶保持电平通过抗镜像滤波器平滑为光滑的模拟信号（滤除寄生的频率分量）。

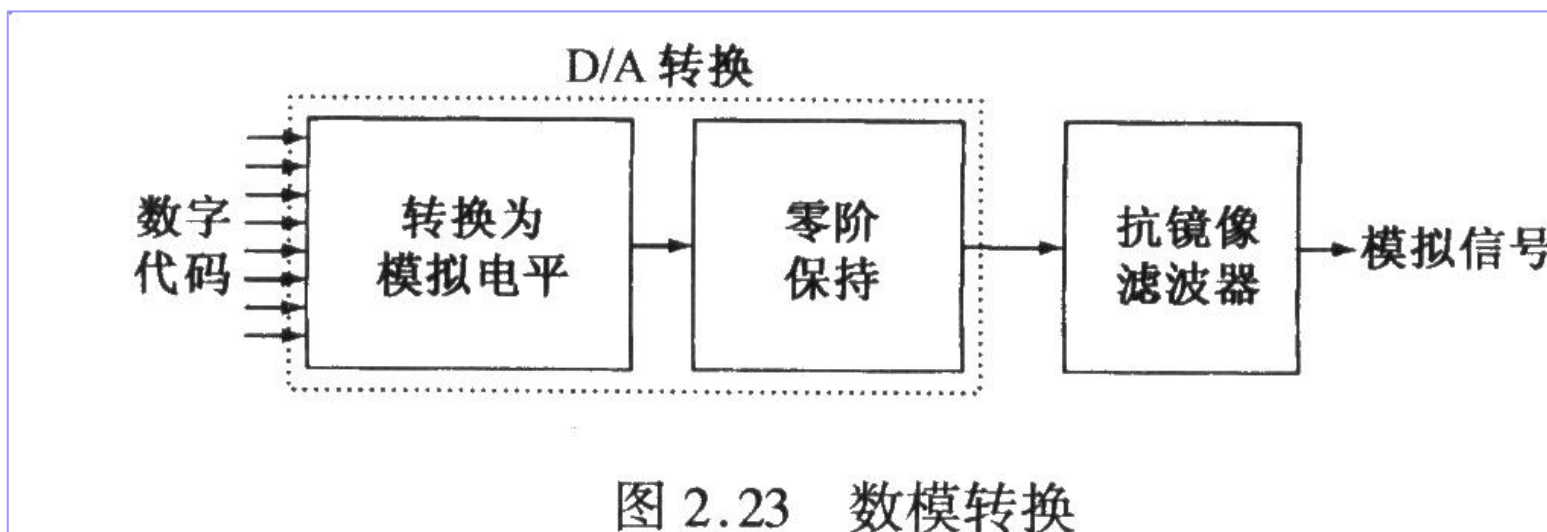


图 2.23 数模转换

图2.24 2.25

- 图2.24中表明转换过程中每一级所得信号的类型。
- 图2.25给出了三比特数字信号的D/A转换。零阶保持得到的阶梯信号与DSP系统的平滑模拟输入不同，平滑模拟输入的频率分量通过抗混叠滤波器后最大频率限制为 WHz 。

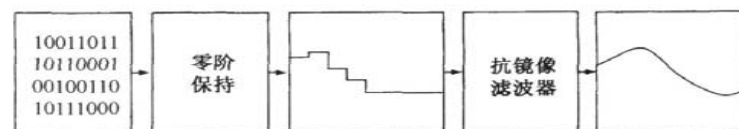


图 2.24 D/A

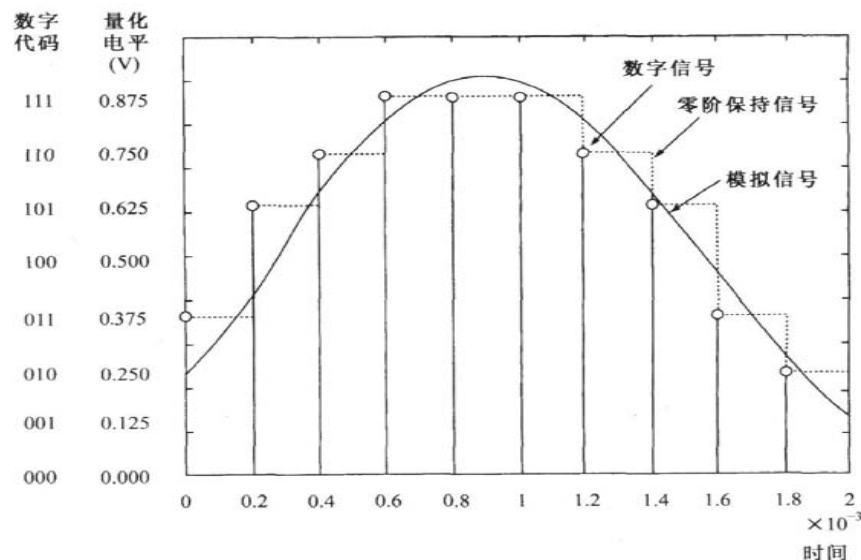


图 2.25 三比特 D/A 转换

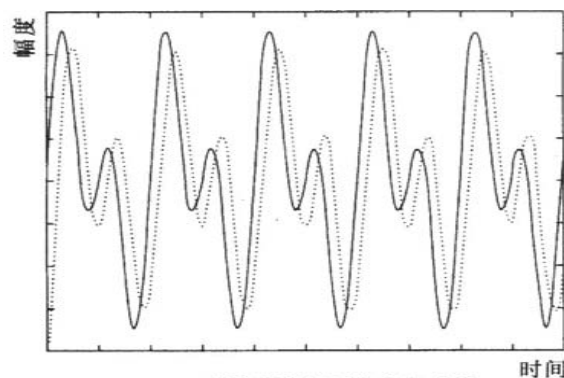
- 图2.25中阶梯信号的陡缘在转换过程中引入了更高的频率分量，它们最后由抗镜像滤波器滤除。该滤波器截止频率为 $W \text{ Hz}$ ，保证所有不需要的频率被滤除。图2.9从频率的角度说明了该滤波器的必要性：**它有效滤除了采样过程中产生的频谱镜像。时域中，抗镜像滤波器的作用是使阶梯信号陡缘变平滑，如图2.25所示。**
- 如果是理想滤波器，且遵守奈奎斯特限制，当不考虑量化误差和滤波产生的时移时，则在A/D转换器之后直接采用D/A转换器将可恢复原模拟信号。

2.5 数/模转换（续）

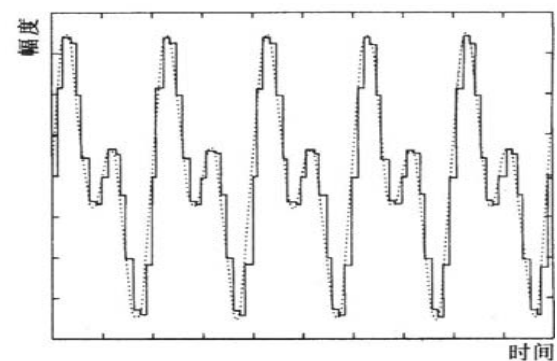
- 与A/D转换器一样，D/A转换器的特性也可以用字长和最高转换速度表示。
- 由于抗镜像滤波器不可能是理想的，为了得到好的信号重建效果，必须增大采样频率以拉开信号频谱副本之间的距离。
- 重建信号的时延（延迟）效应：
 - 恢复出的信号和原信号相比在时间上滞后。

如图2.26所示

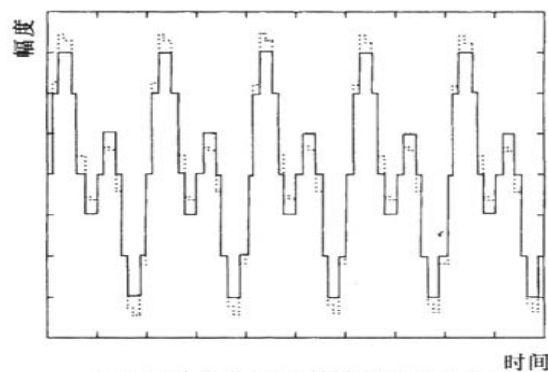
图2.26 重建信号的时延（延迟）效用



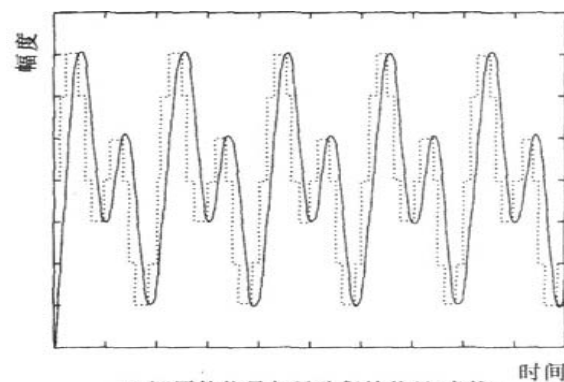
(a) 原信号与还原的信号(虚线)



(b) 采样保持信号与原信号(虚线)



(c) 零阶保持信号与采样保持信号(虚线)



(d) 还原的信号与零阶保持信号(虚线)

小结

1. 采样就是定时从模拟信号中取值，奈奎斯特定理表明采样频率至少为信号最大频率的两倍。
2. 奈奎斯特采样率是被采样信号最大频率的两倍。过采样是以大于奈奎斯特速率进行的采样，使抗混叠滤波器的设计更容易。而欠采样是以小于奈奎斯特速率进行的采样，导致混叠，改变了信号的频谱。
3. 模拟信号转换为数字信号的第一步是通过低通抗混叠滤波器滤除大于奈奎斯特频率的分量。第二步是采样保持，它确定了采样时刻，并保持模拟值以便转换。第三步是量化，对于N比特MD转换器，共有 2^N 个可能的量化电平，选择最接近该采样值的一个，然后把相应的数字代码分配给该采样值，这样就完成了A/D转换。
4. 处理完成后，数字信号必须转换成模拟信号。数字信号先转换成与之成比例的模拟电平，用零阶保持进行一个采样周期的信号保持。D/A转换的最后一步是通过抗镜像滤波器平滑信号。该滤波器滤除了零阶保持信号阶梯状的镜像频谱。
5. 混叠是A/D转换误差的来源之一。因为可用的量化电平数有限，所以量化也是误差的来源之一。比特数越多，误差越小，说明A/D转换器的动态范围越大。

本章作业

4, 10, 14,
19, 20, 21, 24

