第三章　矩阵与行列式

§3.1　矩阵的概念

对任意正整数m和n，由$m \times n$个数或不定元排成的m行n列的表

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{2n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \tag{3.1}$$

称为一个$m \times n$**矩阵**。表中的每个数或不定元称为矩阵的**元素**。排在第i行第j列的元素a_{ij}称为矩阵的**第**(i,j)**元素**；当$i=j$时，a_{ii}也称为矩阵的**对角元**。矩阵(3.1)通常记为$(a_{ij})_{m\times n}$。两个矩阵**相等**，当且仅当它们的行数和列数都相等，且每个位置上的元素都相等。下面介绍几种常见的矩阵名称。

- $n \times n$矩阵称为n阶**方阵**。
- 元素都是0的矩阵称为**零矩阵**，通常记为O。
- 对角元是1其它元素都是0的方阵称为**单位阵**，通常记为I。
- 对角元是a其它元素都是0的方阵称为**数量阵**，通常记为aI。
- 若方阵$A=(a_{ij})_{n\times n}$满足$a_{ij}=0$ 对所有$i \neq j$成立，A称为**对角阵**，通常记为$A=\mathrm{diag}(a_{11},\ldots,a_{nn})$。
- 若矩阵$A=(a_{ij})_{m\times n}$满足$a_{ij}=0$ 对所有$i>j$成立，则A称为**上三角阵**。
- 若矩阵$A=(a_{ij})_{m\times n}$满足$a_{ij}=0$ 对所有$i<j$成立，则A称为**下三角阵**。
- 若方阵$A=(a_{ij})_{n\times n}$满足$a_{ij}=a_{ji}$ 对所有i,j成立，则A称为**对称阵**。
- 若方阵$A=(a_{ij})_{n\times n}$满足$a_{ij}=-a_{ji}$ 对所有i,j成立，则A称为**反对称阵**。
- 若方阵$A=(a_{ij})_{n\times n}$的每行、每列都恰有一个元素等于1且其他元素都等于0，则A称为**置换阵**。
- 若矩阵A的元素都取自某个数域$\mathbb{F}$，则A称为**数域**$\mathbb{F}$**上的矩阵**。特别，若A的元素都是复数、实数、有理数、整数、多项式、⋯，则A分别称为复矩阵、实矩阵、有理数矩阵、整数矩阵、多项式矩阵、⋯。

§3.2 矩阵的运算

§3.2.1 加法和数乘

设矩阵$A=(a_{ij})_{m\times n}$和$B=(b_{ij})_{m\times n}$，λ是一个数或不定元，则

$$A+B=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix} \tag{3.2}$$

和

$$\lambda A=\begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & \lambda a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \cdots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix} \tag{3.3}$$

分别定义了矩阵的**加法**运算和**数乘**运算，记为

$$A+B=(a_{ij}+b_{ij})_{m\times n}, \qquad \lambda A=(\lambda a_{ij})_{m\times n}$$

类似地，可以定义矩阵的**减法**运算和**负矩阵**

$$A-B=(a_{ij}-b_{ij})_{m\times n}, \qquad -A=(-a_{ij})_{m\times n}$$

按照定义，只有大小相同的矩阵才可以相加减。

定理3.1. 矩阵的加法和数乘运算具有下列性质：

(1) $A+B=B+A$；

(2) $(A+B)+C=A+(B+C)$；

(3) $A+O=O+A=A$；

(4) $A+(-A)=(-A)+A=O$；

(5) $(\lambda+\mu)A=\lambda A+\mu A$；

(6) $\lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B$；

(7) $(\lambda\mu)A=\lambda(\mu A)$；

(8) $1A=A$。

因此，数域$\mathbb{F}$上的所有$m\times n$矩阵构成$\mathbb{F}$上的一个线性空间，记为$\mathbb{F}^{m\times n}$。设E_{ij}为(i,j)位置元素等于1，其它位置元素等于0的$m\times n$矩阵，则每个矩阵$A=(a_{ij})_{m\times n}$都可以唯一地表示成$A=\sum\limits_{i,j}a_{ij}E_{ij}$的形式。于是，$\mathbb{F}^{m\times n}$的维数等于$mn$，且$\{E_{ij}\mid 1\le i\le m, 1\le j\le n\}$是$\mathbb{F}^{m\times n}$的一组基。

§3.2.2 矩阵的乘法

并非任意两个矩阵A与B都可以相乘，只有当A的列数等于B的行数时，A与B才可以相乘。设$A=(a_{ij})_{m\times n}$，$B=(b_{ij})_{n\times p}$，定义A与B的**乘积**$AB=(c_{ij})_{m\times p}$，其中

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{in}b_{nj} \tag{3.4}$$

即c_{ij}等于A的第i行与B的第j列相应元素的乘积的和。

(1) 即使A与B是同阶方阵，AB与BA也不一定相等。

(2) 两个非零矩阵的乘积可能是零矩阵。

(3) 在A的左边乘上对角阵相当于将A的各行分别乘上一个数，在A的右边乘上对角阵相当于将A的各列分别乘上一个数。特别，用数量阵λI与A相乘的效果等于矩阵的数乘λA。更特别，$IA=AI=A$，$OA=AO=O$。

定理3.2. 矩阵的乘法运算具有以下性质：

(1) $(AB)C=A(BC)$；

(2) $\lambda(AB)=(\lambda A)B=A(\lambda B)$；

(3) $A(B+C)=AB+AC$；

(4) $(B+C)A=BA+CA$。

其中A,B,C是使运算有意义的矩阵，λ是数或不定元。

通过矩阵的乘法，可以定义任意方阵A的**正整数次幂**

$$A^k=\underbrace{A\cdots A}_{k},\quad k=1,2,\dots$$

另外，对任意方阵A包括零方阵，规定$A^0=I$。有了方阵的各次幂，就可以将方阵带入多项式求值。设多项式$f(x)=c_0+c_1x+\cdots+c_kx^k$，定义

$$f(A)=c_0I+c_1A+\cdots+c_kA^k \tag{3.5}$$

类似地，对收敛的无穷级数$g(x)=c_0+c_1x+\cdots+c_kx^k+\cdots$，同样可以定义

$$g(A)=c_0I+c_1A+\cdots+c_kA^k+\cdots$$

§3.2.3 初等变换

通过对线性方程组实施初等变换，可以消去方程组中的某些变元，将方程组化为阶梯形。对于矩阵，也可以进行同样的操作：

- 交换某两行（列）的位置；
- 用某个非零数乘以某行（列）；
- 某行（列）的若干倍加到另一行（列）。

以上三种对矩阵的行的操作称为矩阵的**初等行变换**，三种对矩阵的列的操作称为矩阵的**初等列变换**，这六种操作统称为矩阵的**初等变换**。对单位方阵施行初等变换，得到的方阵称为**初等方阵**。

- 交换单位阵的第i,j行，或交换第i,j列，得到

$$S_{ij}=\begin{array}{c}\begin{pmatrix}1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 0 & & 1 & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & 1 & & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1\end{pmatrix}\end{array}\begin{array}{l}\\ \\ \leftarrow \text{第}i\text{行}\\ \\ \leftarrow \text{第}j\text{行}\\ \\ \\ \end{array} \tag{3.6}$$

- 用数λ乘以单位阵的第i行，或用数λ乘以第i列，得到

$$P_i(\lambda)=\begin{pmatrix}1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & \lambda & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1\end{pmatrix}\begin{array}{l}\\ \\ \\ \leftarrow \text{第}i\text{行}\\ \\ \\ \\ \end{array} \tag{3.7}$$

- 将单位阵的第j行的λ倍加到第i行，或将第i列的λ倍加到第j列，得到

$$T_{ij}(\lambda)=\begin{pmatrix}1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & \lambda & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1\end{pmatrix}\begin{array}{l}\\ \\ \leftarrow \text{第}i\text{行}\\ \\ \leftarrow \text{第}j\text{行}\\ \\ \\ \end{array} \tag{3.8}$$

定理3.3. 对矩阵作初等行变换，相当于在矩阵的左边乘上一个初等方阵；对矩阵作初等列变换，相当于在矩阵的右边乘上一个初等方阵。

§3.2.4 矩阵的分块

在矩阵运算过程中，如果总是把矩阵的所有元素都写出来，这将是一个非常繁琐的工作，有时既无必要也不可能。一个自然的方式是把$m \times n$矩阵

$$\begin{array}{cc} A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \leftarrow \beta_1 \\ \leftarrow \beta_2 \\ \quad\vdots \\ \leftarrow \beta_m \end{array} \\ \begin{array}{cccc} \uparrow & \uparrow & & \uparrow \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \end{array} & \end{array}$$

视作n个列向量按行排在一起，或m个行向量按列排在一起。记为

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_n \end{pmatrix} \quad \text{或} \quad A = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_m \end{pmatrix}$$

一般地，可以将矩阵同时按行按列分成若干块。

$$A = (A_{ij})_{r \times s} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1s} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2s} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ A_{r1} & A_{r2} & \cdots & A_{rs} \end{pmatrix} \tag{3.9}$$

称为**分块矩阵**，每个A_{ij}称为A的**子块**。更一般地，由A的若干行$I = \{i_1, i_2, \ldots, i_r\}$和若干列$J = \{j_1, j_2, \ldots, j_s\}$上的元素组成的$r \times s$矩阵称为$A$的**子矩阵**，通常记为$A(I, J)$。设矩阵

$$B = (B_{ij})_{r \times s} = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1s} \\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2s} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ B_{r1} & B_{r2} & \cdots & B_{rs} \end{pmatrix}$$

与A有着相同的矩阵大小和分块方式，λ是一个数或不定元。易见

$$A + B = (A_{ij} + B_{ij})_{r \times s} = \begin{pmatrix} A_{11} + B_{11} & A_{12} + B_{12} & \cdots & A_{1s} + B_{1s} \\ A_{21} + B_{21} & A_{22} + B_{22} & \cdots & A_{2s} + B_{2s} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ A_{r1} + B_{r1} & A_{r2} + B_{r2} & \cdots & A_{rs} + B_{rs} \end{pmatrix}$$

$$\lambda A=(\lambda A_{ij})_{r\times s}=\begin{pmatrix}\lambda A_{11} & \lambda A_{12} & \cdots & \lambda A_{1s}\\ \lambda A_{21} & \lambda A_{22} & \cdots & \lambda A_{2s}\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ \lambda A_{r1} & \lambda A_{r2} & \cdots & \lambda A_{rs}\end{pmatrix}$$

对于分块矩阵的乘法，也有类似的结论。

定理3.4. 设$m\times n$矩阵A和$n\times p$矩阵B被分块成为$A=(A_{ij})_{r\times s}, B=(B_{ij})_{s\times t}$，其中每个$A_{ik}$的列数与每个$B_{kj}$的行数相同。则有

$$AB=\begin{pmatrix}\cdots & \cdots & \cdots\\ \vdots & \sum_{k=1}^{s}A_{ik}B_{kj} & \vdots\\ \cdots & \cdots & \cdots\end{pmatrix}_{r\times t}$$

§3.2.5 共轭、转置和迹

当A是复矩阵的时候，将A的每个元素换成它的共轭复数，得到的矩阵

$$\overline{A}=(\overline{a_{ij}})_{m\times n}=\begin{pmatrix}\overline{a_{11}} & \overline{a_{12}} & \cdots & \overline{a_{1n}}\\ \overline{a_{21}} & \overline{a_{22}} & \cdots & \overline{a_{2n}}\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ \overline{a_{n1}} & \overline{a_{n2}} & \cdots & \overline{a_{mn}}\end{pmatrix} \tag{3.10}$$

称为A的**共轭矩阵**。映射$A\to\overline{A}$称为**共轭运算**。

定理3.5. 矩阵的共轭运算具有以下性质：(1) $\overline{\overline{A}}=A$ (2) $\overline{A+B}=\overline{A}+\overline{B}$ (3) $\overline{\lambda A}=\overline{\lambda}\overline{A}$ (4) $\overline{AB}=\overline{A}\ \overline{B}$ (5) $\overline{A^T}=\overline{A}^T$，其中$A,B$是使运算有意义的复矩阵，$\lambda$是复数或不定元。

将矩阵$A=(a_{ij})_{m\times n}$的行列互换，得到的矩阵

$$A^T=(a_{ji})_{n\times m}=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1}\\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2}\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn}\end{pmatrix} \tag{3.11}$$

称为A的**转置矩阵**。映射$A\to A^T$称为**转置运算**。

定理3.6. 矩阵的转置运算具有以下性质：(1) $(A^T)^T=A$ (2) $(A+B)^T=A^T+B^T$ (3) $(\lambda A)^T=\lambda A^T$ (4) $(AB)^T=B^TA^T$，其中A,B是使运算有意义的矩阵，λ是数或不定元。

矩阵A的对角元之和，称为A的**迹**，记作$\mathrm{tr}(A)$。

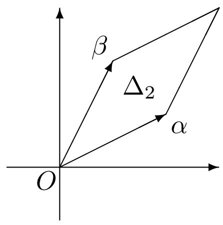
定理3.7. 矩阵的迹具有以下性质：(1) $\mathrm{tr}(A+B)=\mathrm{tr}(A)+\mathrm{tr}(B)$ (2) $\mathrm{tr}(\lambda A)=\lambda\,\mathrm{tr}(A)$ (3) $\mathrm{tr}(AB)=\mathrm{tr}(BA)$，其中$A,B$是使运算有意义的矩阵，$\lambda$是数或不定元。

§3.3 行列式

2阶行列式

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

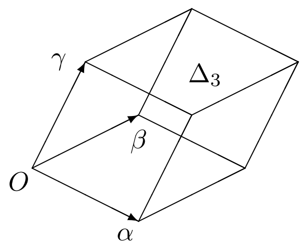
的几何涵义是以$\alpha = (a_1, a_2), \beta = (b_1, b_2)$为邻边的平行四边形的有向面积；



3阶行列式

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

的几何涵义是以$\alpha = (a_1, a_2, a_3), \beta = (b_1, b_2, b_3), \gamma = (c_1, c_2, c_3)$为棱的平行六面体的有向体积。



对于一般正整数n，我们也希望能够计算n维向量$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$张成的$n$维平行多面体的“有向体积”$\Delta_n$。这就是$n$阶行列式，记为$\Delta_n = \det(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$。

§3.3.1 行列式的定义

设$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$是任意$n$维向量，$x, y$是任意常数。满足下面性质(1)、(2)、(3)的函数$\det(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$称为$n$阶**行列式**：

(1) $\det(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$对于每个变量$\alpha_i$都是线性的。

$$\det(\ldots, x\alpha_i + y\beta_i, \ldots) = x\det(\ldots, \alpha_i, \ldots) + y\det(\ldots, \beta_i, \ldots)$$

(2) 如果$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$中存在两个向量相等，则函数值为0。

$$\det(\ldots, \alpha_i, \ldots, \alpha_i, \ldots) = 0$$

(3) 单位正方体的“有向体积”等于1。设$\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$是单位坐标向量，则有

$$\det(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n) = 1$$

由性质(1)和性质(2)，我们还可以得到

(4) 将$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$中某两个向量互换位置，行列式变为相反数。

$$\det(\ldots, \alpha_j, \ldots, \alpha_i, \ldots) = -\det(\ldots, \alpha_i, \ldots, \alpha_j, \ldots)$$

(5) 将$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$中某个向量乘以$\lambda$，行列式为原来的$\lambda$倍。

$$\det(\ldots, \lambda\alpha_i, \ldots) = \lambda \det(\ldots, \alpha_i, \ldots)$$

(6) 将$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$中某个向量的$\lambda$倍加到另一个向量上，行列式不变。

$$\det(\ldots, \alpha_i, \ldots, \lambda\alpha_i + \alpha_j, \ldots) = \det(\ldots, \alpha_i, \ldots, \alpha_j, \ldots)$$

§3.3.2 排列的奇偶性

将自然数$1, 2, \ldots, n$按照任意顺序排成的一个有序数组$s = (s_1 s_2 \cdots s_n)$称为一个n元**排列**。排列$(1\ 2 \cdots n)$称为**标准排列**。n元排列共有$n!$个，所有n元排列的集合通常记为S_n。

对于任意一个排列$s = (s_1 s_2 \ldots s_n)$，有可能出现$i < j$且$s_i > s_j$的情形。这样的一对数$(s_i s_j)$称为一个**逆序**。所有逆序的个数称为**逆序数**，通常记为$\tau(s)$。当$\tau(s)$为偶数时，s称为**偶排列**；当$\tau(s)$为奇数时，s称为**奇排列**。

交换一个排列中某两个数的位置，其它数保持不动，这称为一次**对换**。

定理3.8. 一次对换改变排列的奇偶性。

定理3.9. 任意排列s可经过$\tau(s)$次对换变成标准排列。

§3.3.3 方阵的行列式

设$\alpha_i = (a_{1i}, a_{2i}, \ldots, a_{ni})$是$n$阶方阵$A = (a_{ij})_{n\times n}$的第$i$个列向量（$i = 1, 2, \ldots, n$），我们有

$$\begin{aligned}
\det(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) &= \det\left(\sum_{i=1}^{n} a_{i1}\mathbf{e}_i, \sum_{i=1}^{n} a_{i2}\mathbf{e}_i, \ldots, \sum_{i=1}^{n} a_{in}\mathbf{e}_i\right) \\
&= \sum_{1\le i_1, i_2, \ldots, i_n \le n} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots a_{i_n n} \det(\mathbf{e}_{i_1}, \mathbf{e}_{i_2}, \ldots, \mathbf{e}_{i_n}) \\
&= \sum_{(i_1 i_2 \cdots i_n)\in S_n} (-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots a_{i_n n} \qquad (3.12)
\end{aligned}$$

同理，设$\beta_i = (a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in})$是$A$的第$i$个行向量（$i = 1, 2, \ldots, n$），我们有

$$\begin{aligned}\det(\beta_1, \ldots, \beta_n) &= \det\left(\sum_{j=1}^n a_{1j}\mathbf{e}_j, \sum_{j=1}^n a_{2j}\mathbf{e}_j, \ldots, \sum_{j=1}^n a_{nj}\mathbf{e}_j\right) \\ &= \sum_{1\le j_1, j_2, \ldots, j_n \le n} a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}\det(\mathbf{e}_{j_1}, \mathbf{e}_{j_2}, \ldots, \mathbf{e}_{j_n}) \\ &= \sum_{(j_1j_2\cdots j_n)\in S_n} (-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)} a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n} \qquad (3.13)\end{aligned}$$

由于$(j_1j_2\cdots j_n)$是一个排列，因此$a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n} = a_{i_11}a_{i_22}\cdots a_{i_nn}$，其中$(i_1i_2\cdots i_n)$也是一个排列，由$(j_1j_2\cdots j_n)$唯一决定，并且$\tau(i_1i_2\cdots i_n) = \tau(j_1j_2\cdots j_n)$。因此，

$$\det(\beta_1, \ldots, \beta_n) = \det(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \qquad (3.14)$$

称为**方阵A的行列式**，记作$\det(A)$或者

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

许多教科书也将(3.12)式或者(3.13)式作为n阶行列式的定义。由此，我们得到行列式的另一个性质

(7) 将方阵转置，行列式不变。

$$\det(A) = \det(A^T) \qquad (3.15)$$

利用(3.12)式或者(3.13)式，可得上三角方阵的行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn} \qquad (3.16)$$

类似地，

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} & a_{1,r+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{r1} & \cdots & a_{rr} & a_{r,r+1} & \cdots & a_{r,n} \\ 0 & \cdots & 0 & a_{r+1,r+1} & \cdots & a_{r+1,n} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n,r+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{r1} & \cdots & a_{rr} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{r+1,r+1} & \cdots & a_{r+1,n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n,r+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

更一般地，对准上三角形的分块矩阵，有

$$\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1s} \\ O & A_{22} & \cdots & A_{2s} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ O & \cdots & O & A_{ss} \end{vmatrix} = \det(A_{11})\det(A_{22})\cdots\det(A_{ss}) \tag{3.17}$$

§3.3.4 行列式的计算

计算行列式的最基本的方法是利用行列式的定义和性质(1)－(7)，通过初等变换，将一般方阵的行列式化为上（下）三角方阵的行列式。

例3.10. 计算$\begin{vmatrix} 0 & 5 & -4 & 5 \\ -3 & -1 & -5 & 3 \\ 3 & 1 & -2 & -3 \\ -1 & 4 & -5 & -1 \end{vmatrix}$。

计算行列式的另一个基本的方法是利用行列式的展开定理，将高阶行列式化为低阶行列式。

删去n阶方阵$A = (a_{ij})_{n\times n}$的第i行和第j列之后，剩下的$n-1$阶方阵的行列式M_{ij}，称为a_{ij}的**余子式**，$A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$称为$a_{ij}$的**代数余子式**。$A$的所有代数余子式排列成的$n$阶方阵

$$A^* = (A_{ji})_{n\times n} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix} \tag{3.18}$$

称为A的**伴随方阵**。

定理3.11 (**按一列或一行展开行列式**).

(1) $\det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij}$，$\forall j = 1, 2, \ldots, n$。

(2) $\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij}$，$\forall i = 1, 2, \ldots, n$。

定理3.12. $A^*A = AA^* = \det(A)\ I$。

例3.13. 计算n阶行列式$\Delta_n = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 2 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$。

当一个方阵可以分解为若干个方阵的乘积的时候，乘积的行列式等于行列式的乘积。这种方法对于计算一些特殊方阵的行列式特别有效。

定理3.14. 设A, B都是n阶方阵，则$\det(AB) = \det(A)\det(B)$。

例3.15. 计算Vandermonde行列式$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$。

§3.4 逆矩阵

在§5.2.2中，我们定义了矩阵的乘法和方阵的正整数方幂运算，自然也希望能够定义矩阵的“除法”和方阵的负整数方幂运算。对于矩阵A和B，希望矩阵方程$AX = B$或$YA = B$有唯一解，从而可以定义$A\backslash B$或B/A。对于方阵A，希望存在方阵X满足$AX = XA = I$，从而可以定义A^{-1}和A的负整数方幂。为此我们引入逆矩阵的概念。

§3.4.1 逆矩阵的定义

对于方阵A，如果存在方阵X满足$AX = I$或$XA = I$，则称A**可逆**，并称X为A的**逆矩阵**，记为A^{-1}。

定理3.16. 方阵A可逆的充分且必要条件是$\det(A) \neq 0$。

定理3.17. 当方阵A可逆时，A有唯一逆矩阵$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} A^*$。

定理3.18. 逆矩阵运算具有以下性质：(1) $(A^{-1})^{-1} = A$ (2) $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$ (3) $\overline{A}^T = \overline{A^T}$ (4) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$，其中A, B都是可逆方阵。

§3.4.2 逆矩阵的计算

计算逆矩阵的最基本的方法是利用逆矩阵的定义，通过求解线性方程组$AX = I$得到逆矩阵。

例3.19. 设$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$，计算$A^{-1}$。

计算逆矩阵的另一个方法是通过计算行列式$\det(A)$和伴随方阵A^*。当A的阶数较小或行列式和余子式容易计算时，此法特别有效。

例3.20. 设n阶方阵$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 2 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}_{n\times n}$，计算$A^{-1}$。

当一个方阵可以分解为若干个可逆方阵的乘积的时候，还可以通过定理3.18计算它的逆矩阵。

例3.21. 设n阶方阵$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n \end{pmatrix}$，计算$A^{-1}$。

§3.4.3 Cramer法则

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad\cdots \qquad \cdots \qquad \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \tag{3.19}$$

定理3.22 (**Cramer法则**). 当系数矩阵$A = (a_{ij})_{n\times n}$的行列式$\Delta \neq 0$时，线性方程组(3.19)有唯一解$x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta}$，$j = 1, 2, \ldots, n$。其中$\Delta_j$是将$A$的第$j$列换成$b = (b_1, b_2, \ldots, b_n)^T$后所得矩阵$A_j$的行列式。

例3.23. 设$t_1, t_2, \ldots, t_n$各不相同，求$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$使

$$f(t) = \lambda_1 f(t_1) + \lambda_2 f(t_2) + \cdots + \lambda_n f(t_n)$$

对任意次数不超过$n-1$的多项式$f(t)$都成立。

§3.5 矩阵的秩

§3.5.1 秩的定义

向量组的秩的概念，即极大线性无关组所含向量的个数。对于任意一个矩阵A，A的行向量组的秩称为A的**行秩**，A的列向量组的秩称为A的**列秩**。当A的行向量线性无关时，A称为**行满秩**，当A的列向量线性无关时，A称为**列满秩**。

定理3.24. 若矩阵A既是行满秩又是列满秩，则A是可逆方阵。

定理3.25. 任意矩阵的行秩等于列秩。

矩阵A的行秩、或列秩、或可逆子矩阵的最大阶数统称为A的**秩**，记为$\mathrm{rank}(A)$。特别，零矩阵的秩等于0。

例3.26. 计算n阶方阵$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & & \\ & 1 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 1 & & & 1 \end{pmatrix}$的秩。

§3.5.2 秩的计算

由于行秩在初等行变换下保持不变，列秩在初等列变换下保持不变，因此矩阵的秩在初等变换下保持不变。我们可以通过对矩阵进行初等变换，将其变为简单的形式，从而求出矩阵的秩。

例3.27. 计算n阶方阵$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$的秩。

定理3.28. 设A是$m \times n$矩阵，B是$n \times p$矩阵，则有

$$\mathrm{rank}(AB) \leq \min(\mathrm{rank}(A), \mathrm{rank}(B))$$

定理3.29. 设A是$m \times n$矩阵，P是$m \times m$可逆方阵，Q是$n \times n$可逆方阵。则$\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(PAQ)$。

例3.30. 设A是$m \times n$矩阵，B是$n \times m$矩阵，则有

$$\mathrm{rank}(I_m - AB) - \mathrm{rank}(I_n - BA) = m - n$$

§3.5.3 相抵标准形

设A, B是$m \times n$矩阵，如果存在m阶可逆方阵P和n阶可逆方阵Q，使得$B = PAQ$，则称矩阵A和B是**相抵**的。

定理3.31. 矩阵A和B相抵的充分必要条件是$\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(B)$。

从定理3.31可以看出，所有秩等于r的矩阵都相抵于形如$\begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$的同阶矩阵，称为矩阵的**相抵标准型**。下面举例说明如何利用矩阵的相抵标准形来解决相关的问题。

例3.32. 每个秩为r的矩阵都可以写成r个秩为1的矩阵之和。

例3.33. 若方阵$A = (a_{ij})_{n \times n}$满足$A^2 = A$则$\mathrm{rank}(A) = \mathrm{tr}(A)$。