中国科学院—中国科技大学
1997 年招收攻读硕士学位研究生入学试卷

试题名称：　　　　　　量子力学（理论型）

说明：共六道大题，选作五题，每题 20 分。

一、质量为 m 的粒子在一圆圈上（周长为 L）运动，如果还存在 δ 函数 $V(x)=a\delta(x-\frac{L}{2}),\quad a\neq 0$。请求出系统的所有能级和相应的归一化本征函数。

二、自旋为1的带电粒子（电荷为 q，质量为 m）受到均匀磁场 $\vec{B}=B\vec{e}_y$ 的作用（$\vec{e}_y$ 为 y 方向的单位矢量），其哈密顿量为 $\hat{H}=\frac{eB}{mc}\hat{S}_y$。（$\hat{S}_y$ 为自旋算符的 y 分量），如果 $t=0$ 时粒子的自旋指向正 x 轴方向，求粒子自旋平均值的时间演化。

三、设有算符 b_i 和 $b_i^\dagger$ 满足如下对易关系：

$$b_ib_j^\dagger+b_j^\dagger b_i=\delta_{ij},\quad b_ib_j+b_jb_i=0,\quad b_i^\dagger b_j^\dagger+b_j^\dagger b_i^\dagger=0,\quad (i,j=1,2)$$

求：

(1) 哈密顿量 $\hat{H}=\hbar\omega_1b_1^\dagger b_1+\hbar\omega_2b_2^\dagger b_2,\quad (\omega_2>\omega_1>0)$ 的能谱和相应的本征态；

(2) 在 $\hat{H}$ 和本征态表象中算符 $Q=b_1b_2$ 和 $W=b_1^\dagger b_2^\dagger$ 的矩阵表达式。

四、谐振子的哈密顿量是 $\hat{H}_0=\frac{\hat{p}^2}{2m}+\frac{1}{2}m\omega^2x^2$。设有微扰 $\hat{H}'=\frac{\lambda}{2}m\omega^2x^{2n}$（$n$ 为正整数，λ 为正数，且 $\lambda\ll 1$）。

(1) 请求出基态能量的一级和二级微扰修正；

(2) 如果 $n=0$，请将得到的结果与严格的结果比较。

五、初始时刻 $t=0$ 时，一维量子体系处于 $\hat{H}_0$（不显含 t）的某一本征态 ψ_k 上。

(1) 求该体系在某一微弱的外界作用 $\hat{H}'(x,t)$ 的影响下，由 ψ_k 跃迁到另一本征态 $\psi_l\quad(l\neq k)$ 的跃迁几率 $P_{lk}(t)$ 的普遍的一级近似表达式。

(2) 若 ψ_k 为该系统的基态 ψ_0，而 $\hat{H}'(x,t)=F(x)e^{-t/\tau}$，求在 $t\gg\tau$ 时体系处于某一激发态 ψ_n 的几率 $P_{n0}(t)$（利用上题结果）　（97 实验型 II 第四题）

中国科学院－中国科技大学
1997 年招收攻读硕士学位研究生入学试卷

试题名称：　　　　　　量子力学（实验型 I）

一、在杨氏双窄缝实验中，假设光源 S 发射一个个光子，且每次只有一个光子通过比双缝，在双缝后的观察屏上安置许多单光子探测器，问：

(1) 每次实验的结果如何？

(2) 非常多次的实验结果如何？

(3) 若采用某种方法确定光子经过某个缝，实验结果又如何？

(4) 单个光子能否产生干涉？

二、设 $|k\rangle$ 为厄密算符 $\hat{F}$ 的本征态。

(1) 证明 $\hat{F}$ 表象的完备性关系式 $\sum_k \langle k|\psi\rangle |k\rangle = 1$；

(2) 写出任意算符 $\hat{L}$ 在 $\hat{F}$ 表象的本征方程；

(3) 写出动量表象的完备性关系式。（注：假设 $\hat{F}$ 具有分立谱）

三、质量为 m 的粒子在均匀力场 $f(x)=-F \quad (F>0)$ 中运动，运动范围限制在 $x\ge 0$，试给出动量表象中定态薛定谔方程。

四、粒子处于态：

$$\psi = Cre^{-\alpha r}\sqrt{\frac{4\pi}{3}}\left[\frac{i-1}{\sqrt{2}}Y_{11}+2Y_{01}+\frac{i+1}{\sqrt{2}}Y_{1,-1}\right]=C(x+y+2z)e^{-\alpha r}$$

式中 $\alpha>0$，C 为归一化常数。求：

(1) $\hat{L}^2$ 的取值；

(2) $\hat{L}_z$ 的平均值；

(3) $\hat{L}_z=\hbar$ 的几率；

(4) $\hat{L}_x$ 的可能及相应的几率。

五、一维谐振子的哈密顿量 $\hat{H}=\dfrac{\hat{p}^2}{2m}+\dfrac{1}{2}m\omega^2x^2$，基态波函数

$$\psi(x)=\sqrt{\frac{\alpha}{\sqrt{\pi}}}e^{-\alpha^2x^2/2},\quad \alpha=\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\ 。$$

设振子处于基态。（1990 年（实验型）第二题）

(1) 求 $<x>$ 和 $<p>$；

(2) 写出本征能量 E_0，并说明它反映微观粒子什么特征？

(3) 一维谐振子的维里定理是 $<T>=<V>$，试利用这个定理证明：$\Delta x\cdot\Delta p=\dfrac{\hbar}{2}$，其中 $\Delta x=\sqrt{<x^2>-<x>^2}$，$\Delta p=\sqrt{<p^2>-<p>^2}$ 。

六、在 $t=0$ 时，氢原子的波函数 $\psi(\vec{r},0)=\dfrac{1}{\sqrt{10}}\left[2\psi_{100}+\psi_{210}+\sqrt{2}\psi_{211}+\sqrt{3}\psi_{21-1}\right]$

式中波函数的下标分别是量子数 n，l，m 的值，忽略自旋和辐射跃迁。

(1) 该体系的能量期待值是多少？

(2) 在 t 时刻体系处在 $l=1$，$m=1$ 的态的几率是多少？（1992 年（实验型）第五题）

中国科学院－中国科技大学
1997 年招收攻读硕士学位研究生入学试卷

试题名称：　　　　　　　　量子力学（实验型Ⅱ）

说明：共五道大题，无选择题，计分在题尾标出，满分 100 分。

一、设算符 $K=LM$， $LM-ML=1$，又设 φ 为 K 的本征矢，相应的本征值为 λ，求证 $u\equiv L\varphi$和$v\equiv M\varphi$ 也是 K 的本征态，并求出相应的本征值。

二、质量为 m 和粒子在一维无限深方势阱中运动，势阱可表示为：

$$V(x)=\begin{cases}0, & 0<x<a\\ \infty, & x<0, x>a\end{cases}$$

(1) 求解能量本征值和归一化的本征函数 $\psi_n(x)$。

(2) 求已知 $t=0$ 时，该粒子的态为 $\psi(x,0)=\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\psi_1(x)+\psi_2(x)\right]$，求 t 时刻该粒子的波函数。

(3) 求 t 时刻该粒子的哈密顿算符和坐标算符的平均值 $\overline{H}$ 和 $\overline{x}$。

三、一维谐振子，其能量算符为： $\hat{H}_0=-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}+\frac{1}{2}m\omega^2x^2$ 。设粒子受到微扰 $\hat{H}'=\frac{\lambda}{2}m\omega^2x^2$ 的作用，其中 $|\lambda|^2\ll 1$。(1996 年(实验型)第六题)

(1) 试求该粒子各能级的一级和二级微扰修正。

（提示：坐标 x 的矩阵元 $x_{mn}=\sqrt{\frac{\hbar}{2\mu\omega}}\left(\sqrt{n+1}\delta_{m,n+1}+\sqrt{n}\delta_{m,n-1}\right)$）

(2) 把上述结果与精确求解 $\hat{H}=\hat{H}_0+\hat{H}'$ 得到的本征值相比较。

四、初始时刻 $t=0$ 时，一维量子体系处于 $\hat{H}_0$（不显含 t）的某一本征态 ψ_k 上。

(1) 求该体系在某一微弱的外界作用 $\hat{H}'(x,t)$ 的影响下，由 ψ_k 跃迁到另一本征态 ψ_l　$(l\neq k)$ 的跃迁几率 $P_{lk}(t)$ 的普遍的一级近似表达式。

(2) 若 ψ_k 为该系统的基态 ψ_0，而 $\hat{H}'(x,t)=F(x)e^{-t/\tau}$，求在 $t\gg\tau$ 时体系处于某一激发态 ψ_n 的几率 $P_{n0}(t)$（利用上题结果）(1997 年(理论型)第五题)

五、给定 (θ,φ) 方向单位矢量 $\vec{n}=(n_x,n_y,n_z)=\left(\sin\theta\cos\varphi,\sin\theta\sin\varphi,\cos\theta\right)$。在 σ_z 表象中求 $\sigma_n=\vec{\sigma}\cdot\vec{n}$ 的本征值和归一化的本征态矢。$\vec{\sigma}=(\sigma_x,\sigma_y,\sigma_z)$ 是3个 2×2 泡利矩阵。