# 中国科学院－中国科技大学
# 1993 年招收攻读硕士学位研究生入学试卷

**试题名称：　　　　　　量子力学（理论型）**

说明：共六道大题，选作五题，每题 20 分。

一、质量为 $m$ 的粒子可在势 $V(x)=\alpha\delta(x)$ $(\alpha>0)$ 的作用下作一维运动。设粒子能量 $E<0$，它的波函数可写为

$$\varphi(x)=A_1e^{\lambda x}+A_1'e^{-\lambda x},\quad x<0$$
$$\varphi(x)=A_2e^{\lambda x}+A_2'e^{-\lambda x},\quad x>0$$

(1) 计算矩阵 $M$：$\begin{pmatrix}A_2\\A_2'\end{pmatrix}=M\begin{pmatrix}A_1\\A_1'\end{pmatrix}$。

(2) 求能量 $E$ 的值，解出波函数。

(3) 求动量的几率分布表达式。

二、有一量子体系，其态空间三维，选择基矢为 $\{|1\rangle,\ |2\rangle,\ |3\rangle\}$，定义哈密顿量 $\hat{H}$ 及另二个力学量 $\hat{A}$, $\hat{B}$ 为

$$\hat{H}=\hbar\omega_0\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix},\quad \hat{A}=a\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix},\quad \hat{B}=b\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

设 $t=0$ 时，系统状态为 $|\psi(0)\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle+\frac{1}{2}|2\rangle+\frac{1}{2}|3\rangle$。

(1) 在 $t=0$ 时测量 $E$，可得哪些结果，相应几率多大？计算 $\hat{H}$ 的平均值　　及 $\Delta\hat{H}=\sqrt{\langle\hat{H}^2\rangle-\langle\hat{H}\rangle^2}$。

(2) 如在 $t=0$ 时测量 $\hat{A}$，可能值及相应几率是多少？写出测量后相应的态矢量。

(3) 计算 $t$ 时刻 $\hat{A}$ 与 $\hat{B}$ 的平均值。

三、$\sigma_1$，$\sigma_2$ 为泡利矩阵，证明 $e^{i\alpha\sigma_1}=\cos\alpha+i\sigma_1\sin\alpha$（$\alpha$ 为实数），并推广矩阵 $\sigma=\lambda\sigma_1+\mu\sigma_2$ 的情形（$\lambda$，$\mu$ 为实数，且 $\lambda^2+\mu^2=1$）。

四、求在方向一致，空间均匀但随时间 $t$ 的衰减的电场 $\varepsilon(t)=\begin{cases}0, & t<0\\ \varepsilon_0e^{-t/\tau}, & t>0\end{cases}$（$\varepsilon_0$，$\tau$ 为常数，$\tau>0$）。中原先处于基态的氢原子最后处于 $2p$ 态的几率。已知

$$\psi_{100}=\frac{2}{\sqrt{2a^{3/2}}}e^{-r/a}Y_{00},\quad \psi_{21m}=\frac{1}{2\sqrt{6a^{3/2}}}\frac{r}{a}e^{-r/2a}Y_{1m},\quad \psi_{200}=\frac{1}{\sqrt{2a^{3/2}}}\left(1-\frac{r}{2a}\right)e^{-r/2a}Y_{00}$$

五、一个质量为 $\mu$ 的高能（$E$）粒子被中心势 $V(r)=Ae^{-r^2/a^2}$ $(A<0,a>0)$ 散射，求散射的总截面。

六、两个自旋为 1/2 的全同粒子在公共的各向同性谐振子场中运动，彼此之间没有相互作用。设一个粒子处于谐振子基态，另一个处于沿 $z$ 方向运动的第一激发态，求：

(1) 两粒子体系的波函数；

(2) 系统的总角动量 $(j,\ m_j)$ 的可能值。

# 中国科学院—中国科技大学
# 1993 年招收攻读硕士学位研究生入学试卷

**试题名称：　　　　　　　　量子力学（实验型）**

说明：共五道大题，无选择题，计分在题尾标出，满分 100 分。

一、设一维粒子由 $x=-\infty$ 处以平面波 $\psi_{in}(x)=e^{ikx}$ 入射，在原点处受到势能 $V(x)=V_0\delta(x)$ 的作用。

(1) 写出波函数的一般表达式 $\psi(x)$。

(2) 确定粒子波函数在原点处应满足的边界条件。

(3) 求该粒子的透射系数和反射系数。

(4) 分别指出 $V_0>0$ 和 $V_0<0$ 时的量子力学效应。

二、两原子态间电偶极跃迁几率与它们的偶极矩阵元平方成正比。已知氢原子波函数为 $\psi_{nlm}(\vec{r})=R_{nl}(r)Y_{lm}(\theta,\varphi)$，取玻尔半径 $a=\hbar^2/me^2$ 为长度单位，则

$$R_{10}=2e^{-r},\quad R_{20}=\left(\frac{1}{2}\right)^{3/2}(2-r)e^{-r/2},\quad R_{21}=\left(\frac{1}{2}\right)^{3/2}\frac{r}{\sqrt{3}}e^{-r/2}$$

$$Y_{00}=\frac{1}{\sqrt{4\pi}},\quad Y_{10}=\left(\frac{3}{4\pi}\right)^{1/2}\cos\theta,\quad Y_{1\pm1}=\mp\left(\frac{3}{8\pi}\right)^{1/2}\sin\theta e^{\pm i\varphi}$$

(1) 算出 $n=2$ 的所有矩阵元 $\langle\psi_{nlm}|z|\psi_{100}\rangle$。

(2) 结合你的计算结果，讨论这种矩阵元所涉及的有关 $\Delta l$ 选择定则（不考虑自旋）。

三、设碱金属原子处于沿 $z$ 向的均匀弱磁场 $\vec{B}$ 中，其哈密顿量为 $\hat{H}=\hat{H}_0+\frac{eB}{2\mu c}\hat{L}_z$，其中 $\hat{H}_0$ 为无外场 $\vec{B}$ 时的哈密顿量，其本征函数和本征值分别为 $\psi_{nlm}(\vec{r})=R_{nl}(r)Y_{lm}(\theta,\varphi)$ 和 $\varepsilon_{nl}$；$\hat{H}_1=\frac{eB}{2\mu c}\hat{L}_z$ 是微扰。

(1) 按简并定态一级微扰论方法，求出对应 $\varepsilon_{nl}$ 的各定态能量 $E_{nl}^{(k)}$ 和波函数 $\psi_{nl}^{(k)}(\vec{r})$。

(2)

a) 设此系统 $t$ 时刻一般状态 $\psi(\vec{r},t)$ 可以写成什么形式？其能量平均值 $\overline{E}$ 是否随 $t$ 变化（写出的 $\overline{E}$ 表示式）？

b) 设系统 $t=0$ 时处于基态 $\psi_g(\vec{r},0)$，写出 $t>0$ 时的态 $\psi(\vec{r},t)$ 和能量平均值 $\overline{E}$ 的表示式，并说明其意义。

(3) 此系统再受到一个含时微扰 $\hat{H}_2(t)$ 的作用，定性回答(2)中的两个问题 (a)与(b)。

四、在讨论磁性材料时，由于电子间的库仑作用和泡利不相容原理，可导致两相邻电子之间如下自旋相互作用哈密顿量：$\hat{H}=J\hat{\vec{S}}_1\cdot\hat{\vec{S}}_2$，其中 $J>0$。此算符作用在两电子的如 $|\uparrow\ \downarrow\rangle=|\uparrow\rangle_1|\downarrow\rangle_2$ 诸自旋态上。试求出 $\hat{H}$ 的本征态和本征值（尽量利用角动量性质来简化计算）。

五、带电粒子（电荷为$e$）在均匀磁场中的哈密顿量为$\hat{H}=\dfrac{1}{2m}\left(\hat{\vec{p}}-\dfrac{e}{c}\vec{A}\right)^2$，其中$\hat{\vec{p}}=-i\hbar\nabla$ 和$\vec{A}=(-By,\ \ 0,\ \ 0,)$为矢量算符。

(1) 求出该粒子能谱（可假定态波函数形式为$\psi_{k_x,k_z,k_n}=e^{ik_xx+ik_zz}\varphi_n(y-y_0)$，不必求解$\varphi_n$的具体形式）。

(2)

a) 试讨论该体系波函数与自由粒子与谐振子波函数之间的关系。

b) 结经典运动图象，根据量子力学某些一般规律，讨论本征谱的连续性和分立性。