2014年答案

参考答案（概率统计）

一. 1. 设 A_n = {第n次为正面}，记 $p_n = P(A_n)$

由题意，当 $n \geq 2$ 时，$P(A_n|A_{n-1}) = \beta = 1 - P(A_n|\bar{A}_{n-1})$

根据全概率公式，则有

$$p_n = P(A_n|A_{n-1})P(A_{n-1}) + P(A_n|\bar{A}_{n-1})P(\bar{A}_{n-1})$$

$$= \beta p_{n-1} + (1-\beta)(1-p_{n-1})$$

$$= (2\beta-1)p_{n-1} + (1-\beta), \quad n \geq 2$$

整理可得 $p_n - \frac{1}{2} = (2\beta-1)(p_{n-1} - \frac{1}{2})$.

又 $p_1 = \alpha$ 解得 $p_n = (\alpha - \frac{1}{2})(2\beta-1)^{n-1} + \frac{1}{2}$，$n \geq 1$.

故 $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n = \frac{1}{2}$.

2. 由 $P(g(X) \leq x) = 1 - e^{-x}$，$x>0$ 及 $g(x)$ 单调递增，则

$$P(X \leq g^{-1}(x)) = 1 - e^{-x}, \quad x > 0$$

即 $\int_0^{g^{-1}(x)} 2(1-t)\,dt = 1 - e^{-x}$,

亦即 $2\left(g^{-1}(x) - \frac{(g^{-1}(x))^2}{2}\right) = 1 - e^{-x}$

解得 $g^{-1}(x) = 1 - e^{-\frac{x}{2}}$,

故 $g(x) = -2\ln(1-x)$.